THESE de DOCTORAT D'ETAT

ès Sciences Mathématiques

présentée

à l'Université Pierre et Marie Curie

- Paris -

par Monsieur Badaoui EL MABSOUT

pour obtenir le grade de DOCTEUR ès SCIENCES

Sujet de la thèse :

Espace des phases dans le problème plan des trois corps.

soutenue le 22 novembre 1976 devant le jury composé de :

MM.	Y. THIRY	Président
	A. AVEZ	Rapporteurs
	G. REEB	
	J. MARTINET	
	J.P. BOURGUIGNON	Examinateur

THESE de DOCTORAT D'ETAT

ès Sciences Mathématiques

présentée

à l'Université Pierre et Marie Curie
- Paris -

par Monsieur Badaoui EL MABSOUT

pour obtenir le grade de DOCTEUR ès SCIENCES

Sujet de la thèse :

Espace des phases dans le problème plan des trois corps.

soutenue le 22 novembre 1976 devant le jury composé de :

MM.	Y. THIRY	Président
	A. AVEZ	Rapporteurs
	G. REEB	
	J. MARTINET	
	J.P. BOURGUIGNON	Examinateur

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

ESPACE DES PHASES DANS LE PROBLEME PLAN DES TROIS CORPS

par Badaoui EL MABSOUT

CHAPITRE I. INTRODUCTION.

CHAPITRE II. NOTATIONS - RESULTATS PRELIMINAIRES.

Page

(II.1) Notations. 1
(II.2) $M^7(\omega) \simeq S^3 \times R^4$ 3
(II.3) Si $u \in \hat{S}^3$ alors $u \in M^3(h,\omega) \iff U^2(u) + 2h\,\omega^2 \geqslant 0$.... 4

CHAPITRE III. CARACTERISATION DE $M^2(h,\omega)$.

(III.1) Propriétés de $V(s)$ 6
(III.2) Etude du cas $m_1 > m_2 = m_3$ 9
(III.3) Etude du cas $m_1 = m_2 > m_3$ 12
(III.4) Etude du cas général $m_1 > m_2 > m_3$ 15

CAPITRE IV. CARACTERISATION DE $M^6(h,\omega)$.

(IV.1) Rappels..... 17
(IV.2) $P^{-1}(\nabla') \simeq S^1 \times \Sigma^2$ 17
(IV.3) $M^6(h,0)$..... 23
(IV.4) $M^6(h,\omega)$, $\omega \neq 0$, $h \geqslant 0$ 25
(IV.5) $\pi^{-1}(u)$ est un S^3 28
(IV.6) $V^2(d) + 2h\,\omega^2 > 0$ 28
(IV.7) Si $V^2(d) < -2h\,\omega^2 < V^2(a)$ alors $\pi^{-1}(X) \simeq 2(S^1 \times S^1 \times D^4)$.28
(IV.8) $S^5 \simeq (S^1 \times D^4) \cup (D^2 \times S^3)$..... 31
(IV.9) $V^2(c) < -2h\,\omega^2$..... 32
(IV.10) $V^2(b) < -2h\,\omega^2 < V^2(c)$..... 34
(IV.11) $V^2(a) < -2h\,\omega^2 < V^2(b)$..... 36
(IV.12) $V^2(d) < -2h\,\omega^2 < V^2(a)$..... 37

CHAPITRE V. ETUDE DES CAS LIMITES.

(V.1) $V^2(a) = -2h\omega^2 < V^2(b)$ 40

(V.2) $V^2(a) < V^2(b) = -2h\omega^2 < V^2(c)$ 41

(V.3) $V^3(a) = V^2(b) = -2h\omega^2 < V^2(c)$ 43

(V.4) $V^2(a) \leqslant V^2(b) < V^2(c) = -2h\omega^2$ 44

(V.5) $V^2(a) < V^2(b) = V^2(c) = -2h\omega^2$ 46

(V.6) $V^2(a) = V^2(b) = V^2(c) = -2h\omega^2$ 46

(V.7) $V^2(d) = -2h\omega^2$ 47

(V.8) Si $V^2(a) = -2h\omega^2 < V^2(b)$, E (où $m^6(h,\omega) \simeq S^1 \times E$) possède un point critique non dégénéré d'indice 1.... 48

(V.9) Si $V^2(a) < V^2(b) = -2h\omega^2 < V^2(c)$ alors E possède un point critique non dégénéré d'indice 1..... 61

(V.10) Si $V^2(b) < V^2(c) = -2h\omega^2$, E possède un point critique non dégénéré d'indice 1..... 67

(V.11) Si $V^2(d) = -2h\omega^2$, E possède deux points critiques non dégénérés d'indice 2..... 71

(V.12) Points critiques de E dans les autres cas..... 79

CHAPITRE VI. PREMIER GROUPE D'HOMOTOPIE DE $M^6(h,\omega)$.

(VI.1) $\pi_1[M^6(h, 0)] \simeq Z \times Z_2$ 80

(VI.2) $\pi_1[M^6(h, \omega)] \simeq Z \times Z_2$, pour $\omega \neq 0$ et $h \geqslant 0$..... 81

(VI.3) Si $h < 0$, $\omega \neq 0$ $V^2(d) + 2h\omega^2 = 0$..... 81

(VI.4) $V^2(c) < -2h\omega^2$ 81

(VI.5) $V^2(b) < -2h\omega^2 < V^2(c)$ 81

(VI.6) $V^2(a) < -2h\omega^2 < V^2(b)$ 82

(VI.7) $V^2(b) < -2h\omega^2 < V^3(c)$ 83

(VI.8) $V^2(a) = -2h\omega^2 < V^2(b)$ 84

(VI.9) $V^2(a) < V^2(b) = -2h\omega^2 < V^2(c)$ 84

(VI.10) $V^2(b) < V^2(c) = -2h\omega^2$ 85

(VI.11) $V^2(a) = V^2(b) = -2h\omega^2 < V^2(c)$ 85

(VI.12) $V^2(a) < V^2(b) = V^2(c) = -2h\,\omega^2$. 86

(VI.13) $V^2(a) = V^2(b) = V^2(c) = -2h\,\omega^2$. 86

(VI.14) $V^2(d) = -2h\,\omega^2$. 87

(VI.15) Remarque. 87

(Appendice 1) Domaines de variations de (ρ_1,ρ_2) et de (ρ_2,ρ_3)..... A.I

(Appendice 2) Si $m_1 \geqslant m_2 \geqslant m_3$ alors $V(a) < V(b) < V(c)$ ... A'.I

Références.....

Notations.....

=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548104_0010

CHAPITRE I.

INTRODUCTION.

Rappelons tout d'abord comment se pose le problème.

Trois points de masses respectives m_1, m_2, m_3 sont astreints à se mouvoir dans un plan E^2 et ne sont soumis qu'à leurs attractions newtoniennes mutuelles. Le centre de gravité O est fixe et choisi comme origine de E^2. L'espace de configuration M est

$$\{q = (q_1, q_2, q_3) \in (E^2)^3 \mid \sum_{i=1}^{3} m_i q_i = 0\} .$$

dont on retranche la sous-variété des collisions binaires :

$$\{(q_1, q_2, q_3) \mid q_1 = q_2 \quad \text{ou} \quad q_2 = q_3 \quad \text{ou} \quad q_3 = q_1\} .$$

L'espace des phases est le fibré tangent $T M$, formé des couples (q, v) : $q \in M$, $v = (v_1, v_2, v_3)$, où $v_i \in E^2$ et $\sum_{i=1}^{3} m_i v_i = 0$.

L'énergie cinétique est $K : T M \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$(q, v) \longmapsto \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} m_i \|v_i\|^2 ,$$

où $\| \ \|$ est la norme euclidienne de E^2.

La fonction de force est $U : M \longrightarrow \mathbb{R}$

$$q \longmapsto \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|}$$

Les équations du mouvement, données par les équations d'Hamilton, définissent un champ de vecteur X sur $T M$.

Si $p : T M \longrightarrow M$ est la projection canonique, l'énergie totale $E = K - U \circ p$ est une intégrale première.

Le moment cinétique $J : T M \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(q, v) \longmapsto \sum_{i=1}^{3} m_i \Lambda v_i$$

est une seconde intégrale première. Ainsi

$$I : TM \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(q, v) \longmapsto (E, J)$$

est constant sur chaque orbite. Pour chaque $(h, \omega) \in \mathbb{R}^2$, $I^{-1}(h, \omega)$ est l'ensemble des états d'énergie h et de moment cinétique ω : il est invariant par X et par les rotations autour du centre de gravité O.

Le but de cette thèse est l'étude et la classification topologique complète des sous-variétés $I^{-1}(h, \omega) = M^6(h, \omega)$, de dimension générique 6, pour les différentes valeurs de h, ω et m_1, m_2, m_3.

Les masses m_1, m_2 et m_3 des trois corps vérifiant les inégalités

$$m_1 \geqslant m_2 \geqslant m_3 ,$$

nous avons fait l'étude détaillée de la structure topologique de $M^6(h, \omega)$ et exhibé son premier groupe d'homotopie dans tous les cas possibles, y compris les cas limites où $(- 2h\omega^2)^{\frac{1}{2}}$ est égal à l'une des valeurs minima de V, où $V(s) \equiv \| q\| \, U(q)$, avec

$$s = \left(\frac{\|q_2 - q_3\|}{\|q\|}, \frac{\|q_3 - q_1\|}{\|q\|}, \frac{\|q_1 - q_2\|}{\|q\|}\right) , \quad \|q\|^2 = \sum_{i=1}^{3} m_i \, \|q_i\|^2$$

Cela conduit à étudier, tout d'abord, les propriétés de V et surtout à comparer, pour $m_1 \geqslant m_2 \geqslant m_3$, les trois valeurs

$$V(a), \; V(b) \text{ et } V(c)$$

des minima relatifs de V correspondant aux positions d'équilibre où les trois corps sont colinéaires. Lorsque les masses sont égales, il est évident que ces valeurs sont égales, alors que pour $m_1 > m_2 > m_3$ la démonstration de la double inégalité

$$V(a) < V(b) < V(c)$$

est difficile.

R. Easton [3] a étudié la structure de $M^6(h, \omega)$ dans le cas où les masses sont égales dans les cas suivants :

(1) $\omega = 0$ ou $\omega \neq 0$ et $h \geqslant 0$,

(2) $- 2h\omega^2 < V^2(d)$,

(3) $V^2(d) < - 2h\omega^2 < V^2(a)$,

(4) $V^2(a) < - 2h\omega^2$,

où $V(d)$ est la valeur du minimum absolu de V.

Nous avons utilisé ces résultats et nous les avons généralisés au cas où les masses sont quelconques.

D'autre part S. SMALE ([5] page 49 et 50) a étudié la structure de $M^6(h, \omega)$ pour un choix quelconque des masses dans le cas (1), et amorcé l'étude dans les cas (3) et (4), où les minima relatifs de V n'interviennent pas.

Le présent travail consiste donc à caractériser topologiquement $M^6(h, \omega)$ dans tous les cas où $h < 0$ et $\omega \neq 0$, en discutant suivant les positions de $(- 2h\ \omega^2)$ par rapport aux trois nombres

$$V^2(a),\ V^2(b) \text{ et } V^2(c).$$

Cette discussion comprend en outre l'étude des points critiques que possède $M^6(h, \omega)$ dans le cas où $(- 2h\ \omega^2)$ est égal à l'une des 4 valeurs minimales de $V^2(s)$.

A partir de la structure topologique de $M^6(h, \omega)$, on déduit son premier groupe d'homotopie π_1. On obtient un résultat frappant : dans la majorité des cas, π_1 contient une copie du groupe libre à deux générateurs. Le π_1 est donc à croissance non exponentielle au sens de J. Milnor [10]. C'est une circonstance exclue dans les problèmes intégrables de la mécanique classique où les variétés invariantes sont des tores dont les π_1 est abélien (voir [9]. Cela doit conduire probablement à la non-intégrabilité du problème général plan des trois corps. Les deux cas où le π_1 d'une composante connexe de $M^6(h, \omega)$ est abélien correspondent physiquement à une situation où l'un des trois corps reste assez éloigné des deux autres qui restent voisins. C'est précisément dans cette situation que la théorie des perturbations réussit.

La détermination de π_1 visait à l'étude des orbites fermées. Il est probable que chaque classe d'homotopie libre contient une orbite fermée et une seule. Mais la structure riemannienne induite sur $M^6(h,\omega)$ par l'énergie cinétique est compliquée et assez éloignée de celle d'une variété à courbure négative.

Un autre prolongement naturel de ce travail consisterait à étudier les sous-variétés $M^8(h, \omega)$, analogues à $M^6(h, \omega)$, de l'espace des phases dans le problème spatial des trois corps. Si les inégalités entre les minima de V subsistent, beaucoup de difficultés restent encore à surmonter.

- Monsieur le Professeur André AVEZ m'a proposé le sujet de cette thèse. C'est grâce aux encouragements et aux conseils qu'il m'a prodigués tout au long de cette étude que j'ai pu mener à bien ce travail. Qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissance et de mes profonds remerciements.

- Je ne saurais trop remercier Monsieur le Professeur Yves THIRY, qui a bien voulu présider le jury et qui m'a accueilli dans le séminaire qu'il dirige avec Monsieur le Professeur NAHON.

- Je tiens à remercier Monsieur le Professeur J. MARTINET et Monsieur le Professeur G. REEB pour l'intérêt et l'attention avec lesquels ils ont examiné ce travail.

- Mes remerciements vont aussi à Monsieur J.P. BOURGUIGNON, du Département de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, qui a bien voulu me proposer le deuxième sujet de cette thèse.

- C'est grâce à l'aide amicale et chaleureuse des chercheurs, ingénieurs et calculateurs du Bureau des Longitudes à Paris, que j'ai pu mener à bien le calcul numérique de l'appendice. Je pense, en particulier, à Monsieur D.T. VU, ingénieur. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma reconnaissance.

- J'exprime ma reconnaissance à mes professeurs à la Faculté des Sciences de l'Université Libanaise à Beyrouth où j'ai fait mes premières études universitaires.

- Toute mon affection est acquise à ma femme dont l'aide était indispensable tout le long de ce travail.

- Je remercie aussi Madame GUEGUEN et Madame STAUDENMANN pour les soins d'impression et de présentation et Monsieur SEGOUAT pour la reproduction de cette thèse.

CHAPITRE II.

NOTATIONS. RESULTATS PRELIMINAIRES.

II.1 NOTATIONS.

Trois particules M_1, M_2, M_3 du plan ont des masses respectives m_1, m_2, m_3 et ne sont soumises qu'à leurs attractions newtoniennes. L'origine O du plan étant fixé, on pose $\overrightarrow{O M_i} = \vec{q_i} = (x^{2i-1}, x^{2i})$. Le moment de M_i par rapport à O est noté

$$p_i = (y_{2i-1}, y_{2i}).$$

L'hamiltonien H est

$$H : (\mathbb{R}^6 - K) \times \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x , y) \longmapsto H(x, y) = \frac{1}{2} \|y\|^2 - U(x) ,$$

où $x = (x^1, \ldots, x^6)$, $y = (y_1, \ldots, y_6)$,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{3} [(x^{2i-1})^2 + (x^{2i})^2] \quad \text{si } x \in (\mathbb{R}^6 - K),$$

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{m_i} [(y_{2i-1})^2 + (y_{2i})^2] \quad \text{si } y \in \mathbb{R}^6 ,$$

$$K = \{x \in \mathbb{R}^6 : r_{ij}(x) = 0 \text{ pour au moins un couple } (i, j) \text{ tel que } i \neq j\},$$

$r_{ij}(x)$ = distance dans le plan de M_i à M_j ,

$$U(x) = \sum_{i>j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}(x)} .$$

On ne perd pas de propriété topologique de l'espace des phases en fixant le centre de gravité des trois masses à l'origine (C. Robinson, [12]) :

$$\sum_{i=1}^{3} m_i \vec{q}_i = \vec{0} \quad , \qquad \sum_{i=1}^{3} \vec{p}_i = \vec{0} \quad ; \quad \text{c'est-à-dire}$$

$$(\alpha) \quad \begin{cases} m_1 x^1 + m_2 x^3 + m_3 x^5 = 0 \quad , & y_1 + y_3 + y_5 = 0 \, , \\ m_1 x^2 + m_2 x^4 + m_3 x^6 = 0 \quad , & y_2 + y_4 + y_6 = 0 \end{cases}$$

Le moment cinétique total par rapport à 0 est

$$J : \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x \ , \ y) \longmapsto (x^1 y_2 - x^2 y_1) + (x^3 y_4 - x^4 y_3) + (x^5 y_6 - x^6 y_5)$$

La variété de moment cinétique constant ω et telle que $x \neq 0$ est notée $M^7(\omega)$. Elle est définie par les relations (α), $J(x, y) = \omega$ et $x \neq 0$.

Il sera utile d'introduire les matrices

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -x^2 & x^1 & -x^4 & x^3 & -x^6 & x^5 \end{pmatrix}$$

et $\Omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$.

Soit S^5 la sphère unité de dimension 5. On définit

$$\rho : M^7(\omega) \longrightarrow S^5 \subset \mathbb{R}^6$$

$$(x, y) \rightsquigarrow \frac{x}{\|x\|} = u$$

Son image est

$$\hat{S}^3 = \rho\,[M^7(\omega)] = \{u \in S^5 : m_1 u^1 + m_2 u^3 + m_3 u^5 = 0 \, ,$$

$$m_1 u^2 + m_2 u^4 + m_3 u^6 = 0\}$$

La variété intégrale de moment cinétique ω et d'énergie h, avec $x \in (\mathbb{R}^6 - K)$

est notée

$$M^6(h, \omega) = \{(x, y) \in M^7(\omega) \mid x \in (\mathbb{R}^6 - K),\ H(x, y) = h\}$$

On pose

$$M^3(h, \omega) = \pi[M^6(h, \omega)] \subset \hat{S}^3 ,$$

où π est la restriction de ρ à $M^6(h, \omega)$.

La relation barycentrique

$$m_1 m_2 r_{12}^2(x) + m_2 m_3 r_{23}^2(x) + m_3 m_1 r_{31}^2(x) = \|x\|^2 (m_1 + m_2 + m_3)$$

permet de définir

$$P : \hat{S}^3 \longrightarrow \hat{S}^2$$

$$u \rightsquigarrow s = (s^1, s^2, s^3), \text{ où}$$

$$s^1 = \frac{r_{23}(x)}{\|x\|} , \qquad s^2 = \frac{r_{31}(x)}{\|x\|} , \qquad s^3 = \frac{r_{12}(x)}{\|x\|}$$

$$\hat{S}^2 = \{s = (s^1, s^2, s^3) \in \mathbb{R}^3 : m_2 m_3 (s^1)^2 + m_3 m_1 (s^2)^2 + m_1 m_2 (s^3)^2 = m_1 + m_2 + m_3\}$$

Posons $M^2(h, \omega) = P[M^3(h, \omega)]$ et

$$V(s) = \frac{m_2 m_3}{s^1} + \frac{m_3 m_1}{s^2} + \frac{m_1 m_2}{s^3} \equiv \|x\| U(x).$$

II.2. PROPOSITION :

$M^7(\omega)$ est difféomorphe (en abrégé $\simeq$) à $S^3 \times \mathbb{R}^4$.

Preuve :

$\hat{S}^3$ est difféomorphe à S^3 comme intersection de S^5 avec deux hyperplans distincts passant par l'origine. Soit $u \in \hat{S}^3$. Alors

$$\rho^{-1}(u) = \{(x, y) \in M^7(\omega) : A(u)y = \Omega / \|x\|\}$$

Les mineurs d'ordre 3 de A(u) s'écrivent au signe près,

$(u^2 - u^4)$, $(u^1 - u^3)$, $(u^3 - u^5)$, $(u^4 - u^6)$, $(u^1 - u^5)$, $(u^2 - u^6)$.

Ils ne sont pas tous nuls car $\|u\| \neq 0$. Ainsi rang $A(u) = 3$ et $\{y : A(u)\ y = \Omega\ /\ \|x\|\}$ est un espace $\mathbb{R}^3$ plongé dans $\mathbb{R}^6$ pour chaque $\|x\|$ donné dans $\mathbb{R}^+$. Par conséquent $\rho^{-1}(u) \simeq \mathbb{R}^4$. Ainsi ρ définit une fibration de base S^3 et de fibre $\mathbb{R}^4$ de l'espace $M^7(\omega)$. Comme S^3 est simplement connexe, elle est triviale et $M^7(\omega) \simeq S^3 \times \mathbb{R}^4$.

C. Q. F. D.

Soit $u = \dfrac{x}{\|x\|}$. Remarquons que puisque $U(x)$ est homogène de degré -1 en x, $U(x) = \|x\|.\ U(u)$. Ceci posé

II.3. PROPOSITION :

Soit $u \in \hat{S}^3$. Alors

$$u \in M^3(h, \omega) \iff U^2(u) + 2h\,\omega^2 \geqslant 0$$

Preuve :

Si $u \in M^3(h, \omega)$, alors $(x, y) \in M^7(h, \omega)$ et en posant

$$X^1 = -\sqrt{m_1}\,x^2\ ,\quad X^2 = \sqrt{m_1}\,x^1\ ,\quad X^3 = -\sqrt{m_2}\,x^4\ ,\quad X^4 = \sqrt{m_2}\,x^3\ ,$$

$$X^5 = -\sqrt{m_3}\,x^6\ ,\quad X^6 = \sqrt{m_3}\,x^5\ ,$$

$$Y_1 = \frac{y_1}{\sqrt{m_1}}\ ,\quad Y_2 = \frac{y_2}{\sqrt{m_1}}\ ,\quad Y_3 = \frac{y_3}{\sqrt{m_2}}\ ,\quad Y_4 = \frac{y_4}{\sqrt{m_2}}\ ,\quad Y_5 = \frac{y_5}{\sqrt{m_3}}\ ,\quad Y_6 = \frac{y_6}{\sqrt{m_3}}\ ,$$

la relation $J(x, y) = \omega$ s'écrit $\sum_i X^i Y_i = \omega$.

Puisque $\|x\|^2 = \sum_i (X^i)^2$, $\|y\|^2 = \sum_i (Y_i)^2$, l'inégalité de Schwarz entraîne

$$\omega^2 \leqslant \|x\|^2\ .\ \|y\|^2\ .$$

Mais $\|y\|^2 = 2h + 2U(x)$, donc

$$2h\,\|x\|^2 + 2U(u)\,\|x\| - \omega^2 \geqslant 0\ .$$

Le trinôme $\lambda \longmapsto 2h\,\lambda^2 + 2U(u)\,\lambda - \omega^2$ est donc $\geqslant 0$ pour une

valeur $\|x\| > 0$ de λ. Par suite

$$U^2(u) + 2h\,\omega^2 \geqslant 0.$$

Réciproquement, si cette condition est réalisée, il est facile de voir qu'il existe $\lambda > 0$ avec

$2h\,\lambda^2 + 2U(u)\,\lambda - \omega^2 \geqslant 0$. Prenons $x = \lambda.\,u$.

Il existe des y vérifiant $A(x)\,y = \Omega$ et $\|y\|^2 = 2h + 2U(x)$.

Pour un tel y on a bien $u = \rho(x, y) \in M^3(h, \omega)$,

car $(x, y) \in M^6(h, \omega)$.

CHAPITRE III

CARACTERISATION DE $M^2(h, \omega)$

Dans ce chapitre nous allons caractériser l'espace $M^2(h, \omega)$ en discutant les différents cas obtenus suivant les valeurs relatives des masses des trois corps et selon les valeurs de $(h\ \omega^2)$. Pour cela nous sommes amenés à comparer les minima de la fonction $V(s)$ définie au II.1.

(III.1) PROPRIETES DE V(s).

D'après II, $M^2(h, \omega)$ est un sous-espace de l'ellipsoïde $\hat{S}^2$

$$M^2(h, \omega) = \left\{ s \in \hat{S}^2 \;\middle|\; \begin{array}{ll} (1) & s^1 > 0,\ s^2 > 0,\ s^3 > 0 \\ (2) & s^1 \leqslant s^2 + s^3,\ s^2 \leqslant s^3 + s^1,\ s^3 \leqslant s^1 + s^2 \\ (3) & V^2(s) + 2h\ \omega^2 \geqslant 0 \end{array} \right\}$$

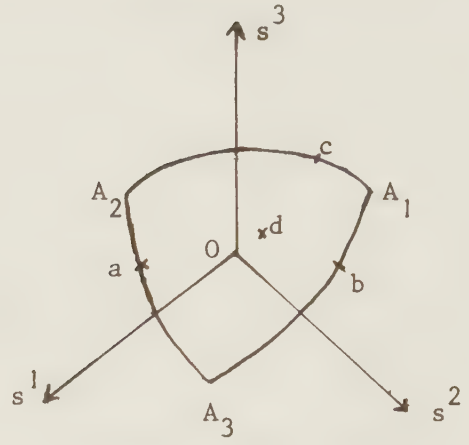
Les deux premières conditions montrent que s appartient à un triange ∇ de $\hat{S}^2$ dont les sommets

$$A_1 = \left(0\ ,\ \left[\frac{\nu}{m_1(m_3 + m_2)}\right]^{\frac{1}{2}}\ ,\ -\left[\frac{\nu}{m_1(m_3 + m_2)}\right]^{\frac{1}{2}} \right),$$

$$A_1 = \left(\left[\frac{\nu}{m_2(m_3 + m_1)}\right]^{\frac{1}{2}}\ ,\ 0\ ,\ \left[\frac{\nu}{m_2(m_3 + m_1)}\right]^{\frac{1}{2}} \right),$$

$$A_3 = \left(\left[\frac{\nu}{m_3(m_1 + m_2)}\right]^{\frac{1}{2}}\ ,\ \left[\frac{\nu}{m_2(m_3 + m_1)}\right]^{\frac{1}{2}}\ ,\ 0 \right),\ (\nu = m_1 + m_2 + m_3),$$

sont exclus d'après la première condition éliminant les collisions doubles entre les particules.



On peut démontrer que $V(s)$ admet un minimum absolu en un point $d(\mu, \mu, \mu)$ intérieur à ∇ où

$$\mu^2 = \frac{\nu}{m_1 m_2 + m_3 m_1 + m_2 m_3} .$$

Le point d correspond à la position d'équilibre relatif des trois corps où la configuration est un triangle équilatéral.

D'autre part $V(s)$ admet un minimum relatif

1°) au point $a = (s_a^1 = s_a^2 + s_a^3 , s_a^2, s_a^3)$ pour $s \in \overset{\frown}{A_2 A_3}$,

2°) au point $b = (s_b^1 , s_b^2 = s_b^3 + s_b^1 , s_b^3)$ pour $s \in \overset{\frown}{A_3 A_1}$,

3°) au point $c = (s_c^1 , s_c^2 , s_c^3 = s_c^1 + s_c^2)$ pour $s \in \overset{\frown}{A_1 A_2}$.

Les trois points a, b, et c situés sur le bord $\partial \nabla$ de ∇ correspondent aux trois positions d'équilibre relatif où les trois corps sont colinéaires.

Posons

$$\rho_1 = \frac{s_a^3}{s_a^2} , \qquad \rho_2 = \frac{s_b^1}{s_b^3} , \qquad \rho_3 = \frac{s_c^2}{s_c^1} .$$

On vérifie que ρ_i est la seule racine réelle positive de l'équation du 5ème degré

$$f_i(\rho_i) = 0, \ (i = 1, 2, 3), \quad \text{avec}$$

$$f_1(\rho_1) = (m_1 + m_3)\rho_1^5 + (3m_3 + 2m_1)\rho_1^4 + (3m_3 + m_1)\rho_1^3 - (3m_2 + m_1)\rho_1^2 - (3m_2 + 2m_1)\rho_1 - (m_2 + m_1) ,$$

$$f_2(\rho_2) = (m_2 + m_1)\rho_2^5 + (3m_1 + 2m_2)\rho_2^4 + (3m_1 + m_2)\rho_2^3 - (3m_3 + m_2)\rho_2^2 - (3m_3 + 2m_2)\rho_2 - (m_3 + m_2) ,$$

$$f_3(\rho_3) = (m_3 + m_2)\rho_3^5 + (3m_2 + 2m_3)\rho_3^4 + (3m_2 + m_3)\rho_3^3 - (3m_1 + m_3)\rho_3^2 - (3m_1 + 2m_3)\rho_3 - (m_1 + m_3) .$$

Soient $\alpha(\rho) = 3\rho^2 + 3\rho + 1$, $\beta(\rho) = \rho^4 + 4\rho^3 + 7\rho^2 + 4\rho + 1$

$$\gamma(\rho) = \rho^4 + 3\rho^3 + 4\rho^2 + 3\rho + 1 ,$$

les équations $f_i(\rho_i) = 0$ s'écrivent encore

$$\rho_1 - 1 = \frac{(m_2 - m_3)\alpha(\rho_1)}{m_1\gamma(\rho_1) + m_3\beta(\rho_1)} , \quad \rho_2 - 1 = \frac{(m_3 - m_1)\alpha(\rho_2)}{m_2\gamma(\rho_2) + m_1\beta(\rho_2)} ,$$

$$\rho_3 - 1 = \frac{(m_1 - m_2)\alpha(\rho_3)}{m_3\gamma(\rho_3) + m_2\beta(\rho_3)} .$$

Or $\beta(\rho) > \gamma(\rho) > \alpha(\rho)$ pour $\rho > 0$; donc, en supposant $m_1 > m_2 > m_3$,

On déduit les inégalités

$$1 < \rho_1 < \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_3} < 2 , \quad \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2} < \rho_2 < 1 ,$$

$$1 < \rho_3 < \frac{m_1 + m_3}{m_2 + m_3} .$$

Ainsi les points a, b, c sont disposés sur la figure ci-contre entre a' et a", b' et b", c' et c" respectivement,

où

$$a'' = (s^2_{a''} + s^3_{a''} , s^2_{a''} , s^3_{a''})$$

avec

$$s^3_{a''} = \left[\frac{m_1 + m_2}{(m_1 + m_3)(m_2 + m_3)}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{(m_1 + m_2)}{(m_3 + m_1)} s^2_{a''} ,$$

$$b'' = (s^1_{b''} , s^3_{b''} + s^1_{b''} , s^3_{b''})$$

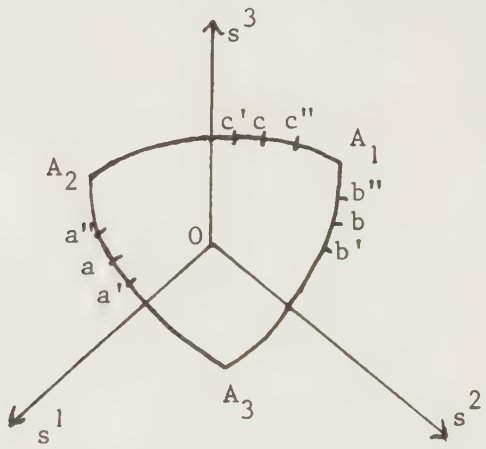
avec

$$s^1_{b''} = \left[\frac{(m_2 + m_3)}{(m_2 + m_1)(m_3 + m_1)}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{(m_2 + m_3)}{(m_1 + m_2)} s^3_{b''} ,$$

$$c'' = (s^1_{c''} , s^2_{c''} , s^1_{c''} + s^2_{c''}) ,$$

avec

$$s^2_{c''} = \left[\frac{m_3 + m_1}{(m_3 + m_2)(m_1 + m_2)}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{(m_3 + m_1)}{(m_2 + m_3)} s^1_{c''} ,$$



a', b', c' étant les points de $(\partial\ \nabla)$ qui donnent les configurations où l'un des trois corps alignés se trouve au milieu des autres :

$$a' = (s^2_{a'} + s^3_{a'},\ s^2_{a'},\ s^3_{a'}) \text{ avec } s^2_{a'} = s^3_{a'} = \left[\frac{\nu}{m_1\ m_2 + m_3\ m_1 + 4m_2\ m_3}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$b' = (s^1_{b'},\ s^1_{b'} + s^3_{b'},\ s^3_{b'}) \text{ avec } s^1_{b'} = s^3_{b'} = \left[\frac{\nu}{m_1\ m_2 + 4m_3\ m_1 + m_2\ m_3}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$c' = (s^1_{c'},\ s^2_{c'},\ s^1_{c'} + s^2_{c'}) \text{ avec } s^1_{c'} = s^2_{c'} = \left[\frac{\nu}{4m_1\ m_2 + m_3\ m_1 + m_2\ m_3}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

III.2. ETUDE DU CAS $m_2 = m_3 < m_1$.

Dans le cas où $m_2 = m_3$ on constate que $\rho_1 = 1$, c'est-à-dire que les points a' et a" sont confondus en a. De plus on a :

$$V^2(b) = V^2(c) \quad \text{et} \quad \rho_2\ \rho_3 = 1.$$

En posant $\rho_2 = \rho$, $\varepsilon = \dfrac{m_2}{m_1}$, l'équation vérifiée par ρ s'écrit

$$(1 + \varepsilon)\ \rho^5 + (3 + 2\varepsilon)\ \rho^4 + (3 + \varepsilon)\ \rho^3 - 4\varepsilon\ \rho^2 - 5\varepsilon\ \rho - 2\varepsilon = 0.$$

Elle donne ε en fonction de ρ :

$$\varepsilon = \frac{\rho^3(\rho^2 + 3\rho + 3)}{-\rho^5 - 2\rho^4 - \rho^3 + 4\rho^2 + 5\rho + 2} = \rho^3.\ g(\rho).$$

Soient

$$y(\varepsilon) = \frac{(1+2\varepsilon)\ V^2(b)}{(m_1)^5\ \varepsilon^3} = \frac{1}{\rho^2(1+\rho)^2}\left[2+2\rho+(1+\varepsilon)\rho^2\right]\left[\varepsilon+(2+\varepsilon)\rho+\rho^2\right]^2 \equiv h\left[\varepsilon, \rho(\varepsilon)\right],$$

$$z(\varepsilon) = \frac{(1+2\varepsilon)\ V^2(a)}{(m_1)^5\ \varepsilon^3} = 2\ (1 + 2\varepsilon)\ (2 + \frac{\varepsilon}{2})^2 .$$

En prenant $m_1 > m_2 = m_3$, on a :

$$0 \leq \varepsilon \leq 1 \quad , \quad 0 \leq \rho \leq 1 \ ;$$

$\rho(\varepsilon)$ vérifie $\rho(0) = 0$, $\rho(1) = 1$ et $\dfrac{d\varepsilon(\rho)}{d\rho} > 0$.

D'autre part

$$y(0) = z(0) = 8 \ , \qquad y(1) = z(1) = \frac{75}{2} \ .$$

Donc, pour comparer $V^2(a)$ et $V^2(b)$, lorsque ε varie entre 0 et 1 il suffit d'étudier le signe de la dérivée $t'(\varepsilon)$ de la fonction $t(\varepsilon) = y(\varepsilon) - z(\varepsilon)$.

Remarquons que $\frac{\partial h}{\partial \rho} = 0$, car pour ε donné $V(s)$ possède un minimum relatif en b. Ainsi

$$t'(\varepsilon) = \frac{\partial h}{\partial \varepsilon} - z'(\varepsilon) = \frac{1}{\rho^2(1+\rho)^2}\left[\rho^6+(6+4\varepsilon)\rho^5-(6+3\varepsilon)\rho^4-(20+18\varepsilon)\rho^3-3\varepsilon\rho^2+(8+12\varepsilon)\rho+4\varepsilon\right].$$

En remplaçant ε par $\rho^3 g(\rho)$ dans la dernière expression, $t'(\varepsilon)$ devient une fonction $P(\rho)$ qui s'écrit :

$$P(\rho) = \frac{-\rho^{10} - 4\rho^9 + 2\rho^8 + 15\rho^7 + 9\rho^6 - 31\rho^5 - 83\rho^4 - 72\rho^3 + 4\rho^2 + 40\rho + 16}{\rho(\rho+1)^2\,(-\rho^5 - 2\rho^4 - \rho^3 + 4\rho^2 + 5\rho + 2)}$$

Le dénominateur étant positif pour $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, il suffit d'étudier le signe du numérateur $N(\rho)$.

On a $N''(\rho) = -90\rho^8 - 288\rho^7 + 112\rho^6 + 630\rho^5 + 270\rho^4 - 620\rho^3 - 996\rho^2 +$

$$- 432\rho + 8 < -90\rho^8 - 288\rho^7 - 604\rho^2 - 432\rho + 8 \ .$$

On démontre que

- $N''(\rho)$ possède une seule racine positive ρ'' telle que

$$0 < \rho'' < \frac{1}{54}$$

- $N'(\rho)$ possède une seule racine positive comprise entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{5}$,

- $N(\rho)$ possède une seule racine positive légèrement inférieure à 0,7.

On en déduit, puisque $\varepsilon'(\rho) > 0$, que $t'(\varepsilon)$ s'annule pour ε légèrement inférieur à $\frac{3}{5}$; il en résulte que $t(\varepsilon)$ passe par un maximum et reste positif pour ε comprise entre 0 et 1.

On a alors $V^2(a) < V^2(b)$ pour $0 < \varepsilon < 1$.

Soit ∇' le triangle ∇ dont on exclut les sommets. Nous sommes amenés à considérer les cas suivants :

1) Si $V^2(d) + 2h\omega^2 \geqslant 0$ alors $M^2(h, \omega)$ est égal à ∇'.

2) Si $V^2(d) < -2h\omega^2 < V^2(a)$ alors $M^2(h, \omega)$ est égal à ∇' dont on retire un disque ouvert entourant le point d (Figure 2).

Pour $V^2(a) = -2h\omega^2$ ce disque touche $\overset{\frown}{A_2 A_3}$ en a. (Figure 2 bis).

3) Si $V^2(a) < -2h\omega^2 < V^2(b)$, alors il faut exclure de ∇' une région entourant a et d (Figure 3).

Pour $V^2(b) = -2h\omega^2$, la région exclue touche $\overset{\frown}{A_1 A_2}$ au point c et $\overset{\frown}{A_3 A_1}$ en b (Figure 3 bis).

4) Si $V^2(b) < -2h\omega^2$ alors $M^2(h, \omega)$ comporte trois composantes connexes disjointes (Figure 4).

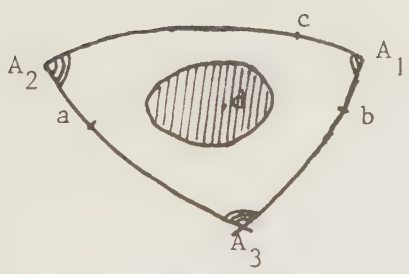


Figure 2

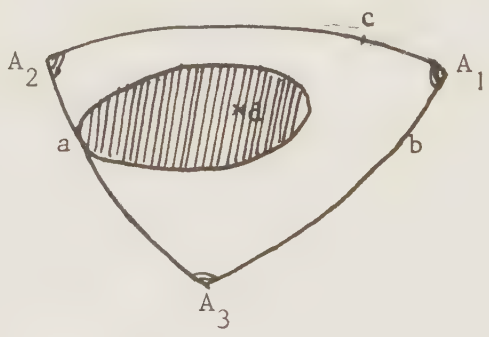


Figure 2 bis

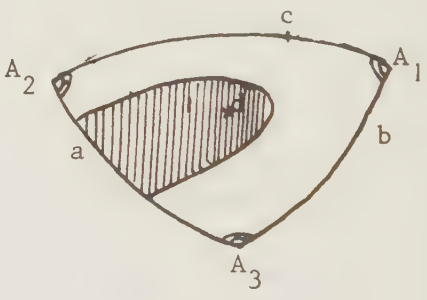


Figure 3

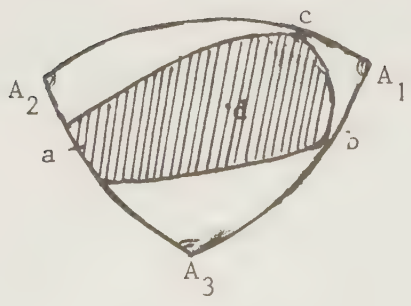


Figure 3 bis

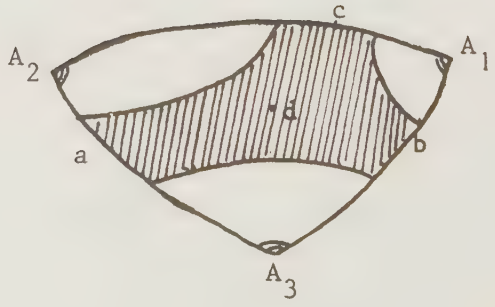


Figure 4

III.3. ETUDE DU CAS $m_1 = m_2 > m_3$.

Dans le cas où $m_1 = m_2 > m_3$, on constate que $\rho_3 = 1$, c'est-à-dire que les points c' et c" sont confondus en c. De plus on a

$$V^2(a) = V^2(b) \quad \text{et} \quad \rho_1 \cdot \rho_2 = 1.$$

En posant $\rho_2 = \rho$, $\varepsilon = \dfrac{m_3}{m_1}$, l'équation vérifiée par ρ s'écrit

$$2\rho^5 + 5\rho^4 + 4\rho^3 - \rho^2 - 2\rho - 1 - \varepsilon(3\rho^2 + 3\rho + 1) = 0.$$

Ce qui donne ε en fonction de ρ :

$$\varepsilon = \frac{2\rho^5 + 5\rho^4 + 4\rho^3 - \rho^2 - 2\rho - 1}{3\rho^2 + 3\rho + 1}.$$

On en déduit que $\dfrac{d\varepsilon(\rho)}{d\rho}$ est positif, et que

$$\varepsilon(1) = 1, \quad \varepsilon(\rho_o) = 0,$$

où ρ_o est un nombre légèrement inférieur à 0,7. Ainsi nous avons

$$0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1 \qquad \text{pour} \qquad \rho_o \leqslant \rho \leqslant 1$$

Soient

$$y(\varepsilon) = \frac{(2+\varepsilon)}{(m_1)^5} \; V^2(a) = \frac{1}{\rho^2(1+\rho)^2}\left[1+\varepsilon(2\rho^2+2\rho+1)\right]\left[\rho+\rho^2+\varepsilon(1+2\rho)\right]^2 \equiv h\left[\varepsilon,\rho(\varepsilon)\right],$$

$$z(\varepsilon) = \frac{(2+\varepsilon)}{(m_1)^5} \; V^2(c) = \frac{1}{2}(2+\varepsilon)(1+4\varepsilon)^2,$$

$$t(\varepsilon) = y(\varepsilon) - z(\varepsilon),$$

où $z(0) = y(0) = 1$ et $z(1) = y(1) = \dfrac{75}{2}$.

Donc, pour comparer $V^2(a)$ et $V^2(c)$, lorsque ε varie entre 0 et 1, il suffit d'étudier le signe de la dérivée $t'(\varepsilon)$, qui s'écrit

$$t'(\varepsilon) = \frac{\partial h}{\partial \varepsilon} - z'(\varepsilon) \equiv \frac{P(\rho)}{\rho^2(1+\rho)^2(3\rho^2+3\rho+1)^2},$$

(en remarquant que $\frac{\partial h}{\partial \varepsilon} = 0$), $P(\rho)$ étant

$$P(\rho)=168\rho^{12}+768\rho^{11}+1352\rho^{10}+848\rho^{9}-560,5\rho^{8}-1314\rho^{7}-850\rho^{6}-95\rho^{5}+207\rho^{4}+150\rho^{3}+50,5\rho^{2}+$$
$$+ 10\rho + 1.$$

On peut démontrer que

- $P'(\rho)$ est croissante pour $\rho_o \leqslant \rho \leqslant 1$,

- $P'(\rho)$ possède une seule racine réelle comprise entre ρ_o et 1 ; cette racine est située entre 0, 8 et 0, 9.

- $P(\rho)$ passe par un minimum négatif ($P(\rho_o)$ étant négatif aussi) avant de s'annuler pour une valeur de ρ comprise entre 0, 9 et 1.

Il en résulte que $t(\varepsilon)$ passe par un minimum pour

$$\varepsilon = \varepsilon_o \quad \text{tel que} \quad 0{,}614 \leqslant \varepsilon_o \leqslant 1$$

On en conclut que

$$V^2(a) < V^2(c) \qquad \text{pour} \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Nous avons ainsi à considérer les cas suivants :

1) Si $V^2(d) + 2h\,\omega^2 \geqslant 0$ alors $M^2(h, \omega)$ est égal à ∇'.

2) Si $V^2(d) < -2h\,\omega^2 < V^2(a)$ alors $M^2(h, \omega)$ est égal ∇' dont on retire un disque ouvert entourant d(Figure 2).

Pour $V^2(a) = -2h\,\omega^2$ ce disque touche $\overset{\frown}{A_2 A_3}$ en a et $\overset{\frown}{A_1 A_3}$ en b (Figure 2 bis).

3) Si $V^2(a) < -2h\,\omega^2 < V^2(c)$ alors $M^2(h, \omega)$ est égal à ∇' dont on ôte une bande contenant a, d et b. $M^2(h, \omega)$ comprend deux composantes connexes disjointes (Figure 3). Pour $V^2(c) = -2h\,\omega^2$ la région exclue touche $\overset{\frown}{A_1 A_2}$ en c (Figure 3 bis) et $M^2(h, \omega)$ comprend trois composantes connexes, l'une d'elles étant disjointe des deux autres qui se touchent au point c.

4) Si $V^2(c) < -2h\omega^2$ alors $M^2(h, \omega)$ comporte trois composantes connexes disjointes (Figure 4).

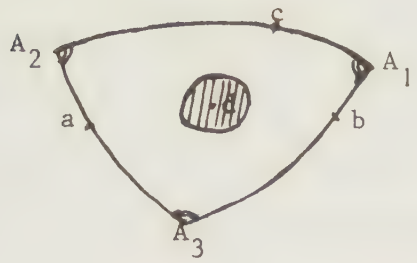


Figure 2

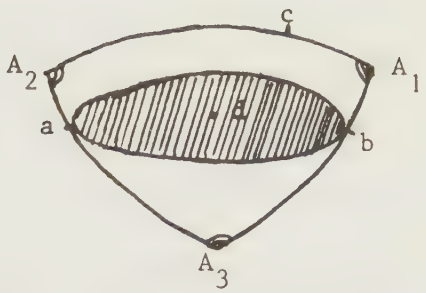


Figure 2 bis

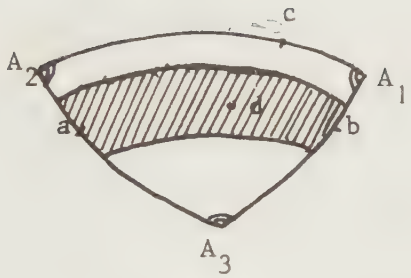


Figure 3

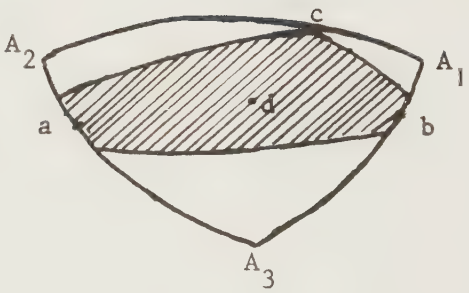


Figure 3 bis

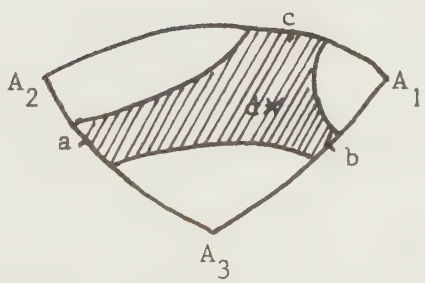


Figure 4.

Notons que $m_1 = m_2 = m_3$ est un cas limite des deux cas précédents, qui est implicitement traité ci-dessus (voir aussi : [3])

III.4. ETUDE DU CAS GENERAL $m_1 > m_2 > m_3$.

On peut toujours se ramener au cas où $m_1 > m_2 > m_3$.

Posons $\varepsilon_2 = \frac{m_2}{m_1}$, $\varepsilon_3 = \frac{m_3}{m_1}$, d'où

$0 < \varepsilon_3 < \varepsilon_2 < 1$; les deux cas particuliers traités dans (III.2) et (III.3) s'obtiennent pour $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ et $\varepsilon_2 = 1$ respectivement.

Il faut comparer les trois quantités :

$$U_1 = \frac{(1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)}{(m_1)^5} V^2(a) = \left[\varepsilon_3 + \varepsilon_2 \rho_1^2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 (1+\rho_1)^2\right] \left[\varepsilon_3 + \frac{\varepsilon_2}{\rho_1} + \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{1+\rho_1}\right]^2 ,$$

$$U_2 = \frac{(1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)}{(m_1)^5} V^2(b) = \left[\varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \rho_2^2 + \varepsilon_3 (1+\rho_2)^2\right] \left[\varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{\rho_2} + \frac{\varepsilon_3}{1+\rho_2}\right]^2 ,$$

$$U_3 = \frac{(1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)}{(m_1)^5} V^2(c) = \left[\varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 (\rho_3)^2 + \varepsilon_2 (1+\rho_3)^2\right] \left[\varepsilon_2 \varepsilon_3 + \frac{\varepsilon_3}{\rho_3} + \frac{\varepsilon_2}{1+\rho_3}\right]^2 ,$$

où ρ_i est la seule racine positive de l'équation

$$f_i(\rho_i) = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{pour} \quad \varepsilon_2 \text{ et } \varepsilon_3 \text{ donnés.}$$

LEMME :

Si $m_1 > m_2 > m_3$ alors $V(a) < V(b) < V(c)$.

Preuve. (Voir les appendices).

Pour $m_1 > m_2 > m_3$ nous avons les cas suivants :

1) Si $V^2(d) + 2h\omega^2 > 0$ alors $M^2(h, \omega)$ est égal à ∇' (Figure 1)

2) Si $V^2(d) < -2h\omega^2 < V^2(a)$ alors $M_2(h, \omega)$ est égal à ∇' dont on retire un disque ouvert entourant d (Figure 2).

La figure 2 bis montre le cas limite où $V^2(a) = -2h\omega^2$, le disque touche $\overset{\frown}{A_2 A_3}$ au point a.

3) Si $V^2(a) < -2h\omega^2 < V^2(b)$ il faut exclure de ∇' une région entourant a et d (Figure 3). Pour $V^2(b) = -2h\omega^2$, la région exclue touche $\overset{\frown}{A_3 A_1}$ en b (Figure 3 bis).

4) Si $V^2(b) < -2h\omega^2 < V^2(c)$, il faut exclure de ∇' une bande contenant a, d et b ; $M^2(h, \omega)$ comprend alors, deux composantes connexes disjointes dont l'une se trouve au voisinage du sommet A_3 (Figure 4). Pour $V^2(c) = -2h\omega^2$, la région exclue touche $\overset{\frown}{A_1 A_2}$ en c (Figure 4 bis).

5) Si $V^2(c) < -2h\omega^2$ alors $M^2(h, \omega)$ comprend trois composantes connexes disjointes se trouvant aux voisinages respectifs des trois sommets (Figure 5).

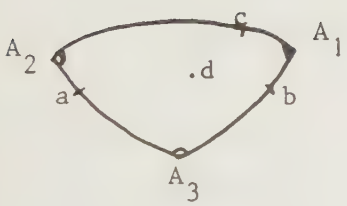


Figure 1

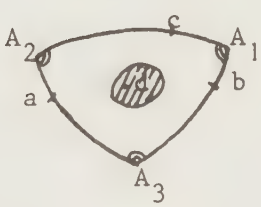


Figure 2

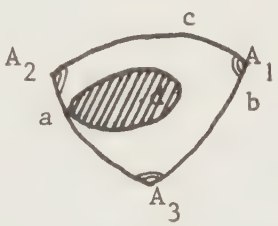


Figure 2 bis

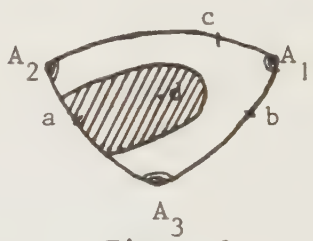


Figure 3

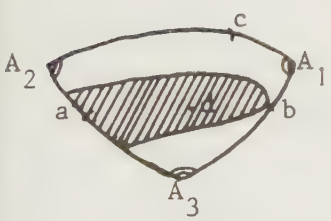


Figure 3 bis

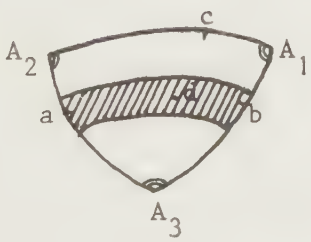


Figure 4

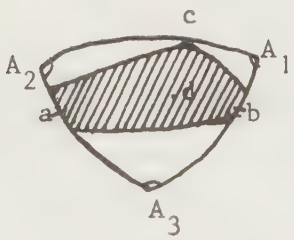


Figure 4 bis

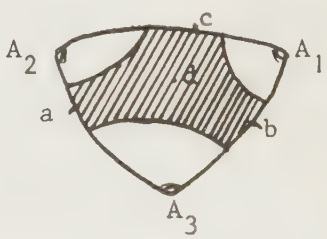


Figure 5

CHAPITRE IV.

CARACTERISATION DE $M^6(h,\omega)$.

IV.1.RAPPELS.

On est conduit à étudier $P^{-1}(\nabla')$, $P^{-1}(s)$ pour $s \in \nabla'$, $\pi^{-1}(u)$ pour $u \in M^3(h,\omega)$, où π est la restriction de ρ à $M^6(h,\omega)$. La discussion dépend des valeurs de $h\,\omega^2$. Les lemmes (IV.6) et (IV.7) caractériserons topologiquement $M^6(h,\omega)$.

Rappelons le schéma suivant :

$$M^7(\omega) \supset M^6(h,\omega) \xrightarrow{\pi} M^3(h,\omega) = \pi[M^6(h,\omega)] \subset \hat{S}^3 \simeq S^3$$

$$(x,y) \rightsquigarrow u = x/\|x\|$$

$$M^3(h,\omega) \xrightarrow{P} M^2(h,\omega) = P[M^3(h,\omega)] \subset \nabla' \subset \hat{S}^2 .$$

$$u \rightsquigarrow P(u) = s = (s^1,s^2,s^3)$$

IV.2. PROPOSITION :

$P^{-1}(\nabla') \simeq S^1 \times \Sigma^2$, où Σ^2 est la sphère S^2 privée de trois points .

Preuve. Rappelons que $\nabla' = \{s = (s^1,s^2,s^3)\}$, où les s^i sont les trois côtés d'un triangle et

$$(IV.2.1) \qquad \frac{(s^1)^2}{m_1} + \frac{(s^2)^2}{m_2} + \frac{(s^3)^2}{m_3} = \frac{\nu}{m_1 m_2 m_3} \quad , \text{ où } \nu = m_1 + m_2 + m_3 .$$

Chercher $P^{-1}(\nabla')$, c'est chercher, pour ces valeurs de s, les $(u^1,u^2,\ldots,u^6)$ vérifiant

$$(IV.2.2) \qquad \begin{cases} (u^3 - u^5)^2 + (u^4 - u^6)^2 = (s^1)^2 , \\ (u^5 - u^1)^2 + (u^6 - u^2)^2 = (s^2)^2 , \\ (u^1 - u^3)^2 + (u^2 - u^4)^2 = (s^3)^2 , \end{cases}$$

$$(IV.2.3) \qquad \begin{cases} m_1 u^1 + m_2 u^3 + m_3 u^5 = 0 , \\ m_1 u^2 + m_2 u^4 + m_3 u^6 = 0 , \end{cases}$$

$$m_1[(u^1)^2 + (u^2)^2] + m_2[(u^3)^2 + (u^4)^2] + m_3[(u^5)^2 + (u^6)^2] = 1.$$

Notons que cette dernière relation est surabondante : elle est la conséquence de (IV.2.1) et (IV.2.3).

L'espace des $(u^1,\ldots u^6)$ n'est autre que l'espace des triangles

$$A_1 = (u^1,u^2) \ , \ A_2 = (u^3,u^4) \ , \ A_3 = (u^5,u^6)$$

d'un plan XOY, dont les côtés sont $s^1 = A_2 A_3$, $s^2 = A_1 A_3$, $s^3 = A_1 A_2$ (relations IV.2.2) et dont le centre de gravité est l'origine O (relations IV.2.3) .

Donnons nous $(s^1, s^2, s^3) \in \nabla'$. Le triangle $A_1 A_2 A_3$ est déterminé à un déplacement près. Plaçons son centre de gravité en O. Le triangle est déterminé à une rotation près et à un retournement près. Cela montre que l'espace des triangles $A_1 A_2 A_3$ est le produit de S^1 par l'espace E des triangles définis à un retournement près.

Séparons la variété E en trois ensembles disjoints E^+, E^- et leur frontière commune. E^+(resp.E^-) est l'espace de vrais triangles $A_1 A_2 A_3$ orientés positivement (resp. négativement) dans le plan XOY. Evidemment E^+(resp.E^-) est difféomorphe à l'intérieur de ∇' , c'est à dire à un disque ouvert. La frontière commune de E^+ et E^- est l'espace des triangles $A_1 A_2 A_3$ aplatis dont les côtés ne sont pas nuls; ce n'est autre que le bord de ∇ privé des trois sommets de ∇ .

E est donc obtenu en identifiant deux disques le long de leur bord et en ôtant trois points de ce bord; Ainsi $E \simeq \Sigma^2$ (voir [13] , qui sera utilisé implicitement pour toutes les opérations de recollement). (c.q.f.d) .

Nous allons introduire sur Σ^2 des coordonnées locales qui seront utiles aux (V.7),...,(V.12) .

Soit $s \in \nabla'$ donné et $u \in P^{-1}(s)$. Posons

(IV.2.4) . $\quad x = u^3 - u^5, \ y = u^1 - u^5 \ , \ z = u^4 - u^6 \ , \ t = u^2 - u^6$.

Les équations (IV.2.2) deviennent

$$x^2 + z^2 = (s^1)^2$$

$$y^2 + t^2 = (s^2)^2$$

$$(x - y)^2 + (z - t)^2 = (s^3)^2 \ .$$

Cela conduit à poser

$$(IV.2.5)\quad \begin{cases} x = s^1 \cos\varphi \ , \quad z = s^1 \sin\varphi \ , \\ y = s^2 \cos\theta \ , \quad t = s^2 \sin\theta \ ; \ \text{d'où} \end{cases}$$

$$xy + zt = \frac{1}{2}[\,(s^1)^2 + (s^2)^2 - (s^3)^2\,] = s^1 s^2 \cos(\theta-\varphi) = s^1 s^2 \cos\varphi_o \ ,$$

où l'on pose

$$\cos\varphi_o = \frac{(s^1)^2 + (s^2)^2 - (s^3)^2}{2 s^1 s^2} \ .$$

Ainsi $\theta = \varphi + \varphi_o$, φ_o étant déterminé au signe près.

Les relations (IV.2.3) et (IV.2.4) entrainent

$$x = \frac{1}{m_3}\,[\,m_1 u^1 + (m_2 + m_3) u^3\,] \ , \quad y = \frac{1}{m_3}[\,(m_3 + m_1) u^1 + m_2 u^3\,] \ ,$$

$$z = \frac{1}{m_3}\,[\,m_1 u^2 + (m_2 + m_3) u^4\,] \ , \quad t = \frac{1}{m_3}[\,(m_3 + m_1) u^2 + m_2 u^4\,] \ .$$

Inversement

$$u^1 = \frac{1}{\nu}[\,(m_2 + m_3) y - m_2 x\,] \ , \quad u^2 = \frac{1}{\nu}[\,(m_2 + m_3) t - m_2 z\,] \ ,$$

$$u^3 = \frac{1}{\nu}[\,(m_3 + m_1) x - m_1 y\,] \ , \quad u^4 = \frac{1}{\nu}[\,(m_3 + m_1) z - m_1 t\,]$$

$$u^5 = -\frac{1}{\nu}[\,m_2 x + m_1 y\,] \ , \quad u^6 = -\frac{1}{\nu}[\,m_2 z + m_1 t\,] \ .$$

Compte tenu de (IV.2.5) on a

$$(IV.2.7)\quad \begin{cases} u^1 = \nu^{-1}[\,(m_2 + m_3) s^2 \cos(\varphi + \varphi_o) - m_2 s^1 \cos\varphi\,] \ , \\ u^2 = \nu^{-1}[\,(m_2 + m_3) s^2 \sin(\varphi + \varphi_o) - m_2 s^1 \sin\varphi\,] \ , \\ u^3 = \nu^{-1}[\,(m_3 + m_1) s^1 \cos\varphi - m_1 s^2 \cos(\varphi + \varphi_o)\,] \ , \\ u^4 = \nu^{-1}[\,(m_3 + m_1) s^1 \sin\varphi - m_1 s^2 \sin(\varphi + \varphi_o)\,] \ , \\ u^5 = \nu^{-1}[\,m_2 s^1 \cos\varphi + m_1 s^2 \cos(\varphi + \varphi_o)\,] \ , \\ u^6 = \nu^{-1}[\,m_2 s^1 \sin\varphi + m_1 s^2 \sin(\varphi + \varphi_o)\,] \ . \end{cases}$$

Ceci met en évidence l'angle φ de rotation indépendant de s .

En effet

$$(IV.2.8)\qquad \begin{cases} u^1 + i\,u^2 = e^{i\varphi}\,(\sigma^1 + i\,\sigma^2)\ , \\ u^3 + i\,u^4 = e^{i\varphi}\,(\sigma^3 + i\,\sigma^4)\ , \\ u^5 + i\,u^6 = e^{i\varphi}\,(\sigma^5 + i\,\sigma^6)\ , \end{cases}$$

avec

$$(IV.2.9)\qquad \begin{cases} \sigma^1 = \frac{1}{\nu}\,[\,(m_2 + m_3)\,s^2 \cos\varphi_o - m_2\,s^1\,] \ , \\ \sigma^2 = \frac{1}{\nu}\,[\,(m_2 + m_3)\,s^2 \sin\varphi_o\,] \ , \\ \sigma^3 = \frac{1}{\nu}\,[\,(m_3 + m_1)\,s^1 - m_1\,s^2 \cos\varphi_o\,] \ , \\ \sigma^4 = -\frac{1}{\nu}\,[\,m_1\,s^2 \sin\varphi_o\,] \ , \\ \sigma^5 = -\frac{1}{\nu}\,[\,m_2\,s^1 + m_1\,s^2 \cos\varphi_o\,] \ , \\ \sigma^6 = -\frac{1}{\nu}\,[\,m_1\,s^2 \sin\varphi_o\,] \ . \end{cases}$$

Les σ^i $(i = 1,2,\ldots,6)$ vérifient les relations

$$\|\sigma\| = 1 \quad , \quad \sigma^4 = \sigma^6 \quad ,$$

$$(IV.2.10)\qquad \left\{ m_1\,\sigma^1 + m_2\,\sigma^3 + m_3\,\sigma^5 = 0 \ , \ m_1\,\sigma^2 + m_2\,\sigma^4 + m_3\,\sigma^6 = 0 \ , \right.$$

qui donnent

$$\sigma^4 = \sigma^6 = -\frac{m_1\,\sigma^2}{m_2 + m_3} \ , \qquad \sigma^5 = \frac{-1}{m_3}\,(m_1\,\sigma^1 + m_2\,\sigma^3) \ ,$$

d'où

$$\|\sigma\|^2 = m_1\left[(\sigma^1)^2 + (\sigma^2)^2\right] + m_2(\sigma^3)^2 + \frac{m_2(m_1)^2(\sigma^2)^2}{(m_2 + m_3)^2}$$

$$+ \frac{1}{m_3}\,(m_1\,\sigma_1 + m_2\,\sigma^3)^2 + \frac{m_3\,(m_1)^2}{(m_2 + m_3)^2}\,.\,(\sigma^2)^2 = 1 \ ,$$

ou

$$\left(\frac{\nu m_1}{m_2 + m_3}\right)(\sigma^2)^2 + \frac{m_1(m_3 + m_1)}{m_3}\,(\sigma^1)^2 + \frac{m_2(m_2 + m_3)}{m_3}\,(\sigma^3)^2 + \frac{2m_1\,m_2}{m_3}\,\sigma^1\,\sigma^3 = 1 \ .$$

or, $m_1(m_3+m_1)(\sigma^1)^2 + 2m_1 m_2 \sigma^1 \sigma^3 = m_1(m_3+m_1)\left[(\sigma^1)^2 + \frac{2m_2 \sigma^1\sigma^3}{m_3+m_1}\right] =$

$$m_1(m_3+m_1)\left[\sigma^1 \frac{m_2 \sigma^3}{m_3+m_1}\right]^2 - \frac{m_1(m_2)^2}{m_3+m_1}(\sigma^3)^2 ,$$

donc

$$\text{(IV.2.11)} \quad \frac{\nu m_1}{m_2+m_3}(\sigma^2)^2 + \frac{m_1}{m_3(m_3+m_1)}\left[(m_3+m_1)\sigma^1+m_2\sigma^3\right]^2 + \left(\frac{m_2\nu}{m_3+m_1}\right)(\sigma^3)^2 = 1 .$$

Effectuons le changement de variables

$$\text{(IV.2.12)} \quad \begin{cases} v^1 = \sqrt{\frac{m_1}{m_3(m_3+m_1)}}\left[(m_3+m_1)\sigma^1 + m_2\sigma^3\right], \\ v^2 = \sqrt{\frac{\nu m_1}{m_2+m_3}} \cdot \sigma^2 , \\ v^3 = \sqrt{\frac{\nu m_2}{m_3+m_1}}\,\sigma^3 , \end{cases}$$

la relation (IV.2.11) devient

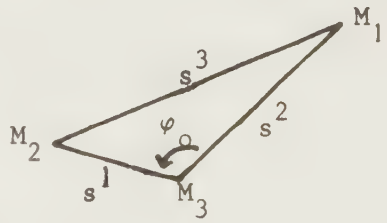
$$\text{(IV.2.13)} \quad (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 = 1$$

c'est l'équation d'une sphère S^2 à deux dimensions.

Remarque : L'angle φ_o n'est autre que l'angle $(\overrightarrow{M_3M_1}, \overrightarrow{M_3M_2})$, M_1, M_2 et M_3 étant les trois corps.

Pour $s \in \nabla'$ donné on a

$$\cos\varphi_o = \frac{(s^1)^2 + (s^2)^2 - (s^3)^2}{2s^1 s^2} ,$$



ce qui fait que $\sin\varphi_o$ est déterminé au signe près par

$$\sin^2\varphi_o = \frac{4(s^1)^2(s^2)^2 - \left[(s^1)^2+(s^2)^2-(s^3)^2\right]^2}{4(s^1)^2(s^2)^2} = \frac{(s^1+s^2+s^3)(s^1+s^2-s^3)(s^3+s^2-s^1)(s^3+s^1-s^2)}{4(s^1)^2(s^2)^2}$$

Il en résulte que φ_o s'annule, à un multiple de π près, pour tout $s \in (\partial\nabla')$.

Supposons v donné, les relations (IV.2.12) inversées permettent de déterminer

σ d'une façon unique :

$$(IV.2.13)\qquad \begin{cases} \sigma^1 = \sqrt{\dfrac{m_3}{m_1(m_3+m_1)}} & v^1 - \sqrt{\dfrac{m_2}{\nu\,(m_3+m_1)}}\quad v^3 \\ \sigma^2 = \sqrt{\dfrac{(m_2+m_3)}{\nu\, m_1}} \cdot v^2 \\ \sigma^3 = \sqrt{\dfrac{(m_3+m_1)}{\nu\, m_2}} \cdot v^3 \end{cases}$$

Mais les relations (IV.2.9) donnent

$$\nu\sigma^1 + m_2 s^1 = (m_2 m_3)\, s^2 \cos \varphi_\circ \ ,$$

$$\nu\sigma^2 = (m_2+m_3)\, s^2 \sin \varphi_\circ \ ,$$

$$\nu\sigma^3 = (m_3+m_1)\, s^1 - m_1 s^2 \cos \varphi_\circ \ ,$$

d'où

$$s^1 = \frac{m_1 \sigma^1 + (m_2+m_3)\sigma^3}{m_3} \ ,$$

$$(m_2+m_3)^2 (s^2)^2 = (\nu\sigma^1 + m_2 s^1)^2 + \nu^2 (\sigma^2)^2 \ ,$$

et finalement

$$s^1 = \sqrt{\frac{m_1}{m_3(m_3+m_1)}}\, v^1 + \sqrt{\frac{\nu}{m_2(m_3+m_1)}} \cdot v^3 = \frac{1}{\sqrt{(m_3+m_1)}} \left[\sqrt{\frac{m_1}{m_3}}\, v^1 + \sqrt{\frac{\nu}{m_2}}\, v^3 \right] \ ,$$

$$s^2 = \sqrt{\frac{m_3+m_1}{m_3 m_1}(v^1)^2 + \frac{\nu (v^2)^2}{m_1(m_2+m_3)}} = \sqrt{\frac{m_2 (v^1)^2}{m_3(m_2+m_3)} - \frac{\nu (v^3)^2}{m_1(m_2+m_3)}}$$

Ainsi les relations (IV.2.1) et (IV.2.14) permettent de trouver un s unique pour v donné. Définissons alors l'application

$$\beta : S^2 \longrightarrow \nabla$$

$$v \rightsquigarrow \beta(v) = s.$$

Pour tout $s \in (\partial\nabla')$, sin $\varphi_\circ = 0$ et les relations (IV.2.9) et (IV.2.12)

entrainent $v^2 = \sigma^2 = 0$, alors que v^1 et v^3 sont déterminés d'une façon unique en fonction de s . Donc $\beta^{-1}(\partial\nabla')$ est égal à (c) privé de trois points distincts, (c) étant le grand cercle de S^2 défini par $v^2 = 0$. Les trois points exclus correspondent aux sommets exclus de ∇ .

On désignera, dans la suite, par Σ^2 la sphère S^2 privée de ces trois points distincts.

Pour tout $s \in (\nabla' - \partial\nabla')$ les relations (IV.2.9) et (IV.2.12) permettent d'écrire

$$(IV.2.15)\quad \begin{cases} v^1 = \sqrt{\dfrac{m_3\, m_1}{m_3 + m_1}}\; s^2 \cos\varphi_o \ , \\ v^2 = \sqrt{\dfrac{m_1\,(m_2 + m_3)}{\nu}}\; s^2 \sin\varphi_o \ , \\ v^3 = \sqrt{\dfrac{m_2}{\nu(m_3 + m_1)}}\; \left[(m_3 + m_1)\, s^1 - m_1\, s^2 \cos\varphi_o \right] , \end{cases}$$

donc v^1 et v^3 sont déterminés d'une manière unique alors que v^2 le sera au signe près. Ainsi $\beta^{-1}(s)$ est l'ensemble de deux points de S^2 symétriques par rapport au plan du grand cercle (c); ces deux points se confondent en un point unique de (c), lorsque $s \in (\partial\nabla')$.

On en conclut que $\beta^{-1}(\nabla') = \Sigma^2$,

$$P^{-1}(s) = S^1 \times \beta^{-1}(s) \ , \text{ et}$$

$$P^{-1}(\nabla') = S^1 \times \Sigma^2 \ .$$

(IV.3) PROPOSITION :

$M^6(h,0)$ est difféomorphe à $(S^1 \times \Sigma^2 \times R \times S^2)$ si $h \geqslant 0$, et à $(S^1 \times \Sigma^2 \times R^3)$ si $h < 0$, Σ^2 étant la sphère S^2 privée de trois points distincts.

Preuve. Pour $\omega = 0$, l'inégalité $V^2(d) + 2h\omega^2 > 0$ est vérifiée pout tout h, donc

$$M^2(h,0) = \nabla' \quad \text{et} \quad M^3(h,0) \simeq S^1 \times \Sigma^2 \qquad \text{d'après (IV.2)} \ .$$

Rappelons que

$$M^6(h,0) = \left\{ (x,y) \quad (R^6-K) \times R^6 \right.$$

$$(\alpha) : \|y\|^2 = 2h + 2U(x) ,$$

$$(\beta) : A(x)y = 0 ,$$

$$(\gamma) : \begin{cases} m_1 x^1 + m_2 x^3 + m_3 x^5 = 0 , \\ m_1 x^2 + m_2 x^4 + m_3 x^6 = 0 \end{cases}$$

où $$A(x) = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -x^2 & x^1 & -x^4 & x^3 & -x^6 & x^5 \end{pmatrix} .$$

Les relations (γ) montrent que $\pi(x,y) = \frac{x}{\|x\|} = u \in M^3(h,0) \subset \hat{S}^3 \subset S^5$, où $\hat{S}^3$ est un sous-espace de S^5 difféomorphe à S^3 .

La relation (β) montre que, pour u donné appartenant à $\hat{S}^3$, l'espace

$$E_u = \left\{ y \in R^6 \mid A(u)y = 0 \right\} \text{ est difféomorphe à } R^3 .$$

1) <u>Supposons $h \geq 0$</u> : La relation (α) implique que, pour u donné et pour $\|x\| \in R^+$ donné, $\|y\|$ ne s'annule pas. On en déduit que le sous-espace de E_u

$$V_u = \{ v = \frac{y}{\|y\|} \mid y \in E_u \} \equiv \{ v \in S^5 \subset R^6 \mid A(u)v = 0 \}$$

est difféormorphe à S^2.

Définissons alors l'espace

$$E = \{ (u,\lambda,v) \mid u \in \hat{S}^3, \ \lambda \in R^+, \ v \in S^5 \subset R^6, \ A(u)v = 0 \}$$

et la projection

$$p : E \longrightarrow \hat{S}^3 \times R^+ .$$

L'espace E est un fibré trivial de fibre S^2 au dessus de $(\hat{S}^3 \times R^+)$.

Il est difféormorphe à $(S^3 \times R \times S^2)$.

D'autre part, on peut vérifier que l'application :

$$\alpha : M^6(h,0) \longrightarrow E$$

$$(x,y) \rightsquigarrow \alpha(x,y) = \left(\frac{x}{\|x\|} , \|x\| , \frac{y}{\|y\|} \right)$$

est un homéomorphisme de $M^6(h,0)$ sur $\alpha[M^6(h,0)]$ et que

$$\alpha [M^6(h,0)] = p^{-1} [M^3(h,0) \times R^+] .$$

Il en résulte de (IV.2) que $M^6(h,0)$ est difféomorphe à $(S^1 \times \Sigma^2 \times R \times S^2)$.

2) Supposons $h < 0$. Soit $E' = \{ (u,y) \in \hat{S}^3 \times R^6 \mid A(u)y = 0 \}$, et soit p' la projection

$$p' : E' \longrightarrow \hat{S}^3 .$$

$$(u,y) \rightsquigarrow u$$

L'espace E' est un fibré trivial de fibre R^3 au dessus de $\hat{S}^3$. Il est difféomorphe à $(S^3 \times R^3)$.

L'application

$$\beta : M^6(h,0) \longrightarrow E'$$

$$(x,y) \rightsquigarrow \left(\frac{x}{\|x\|} , y \right)$$

est un plongement. De plus on a

$$\beta [M^6(h,0)] = p'^{-1} [M^3(h,0)] .$$

On en déduit que $M^6(h,0) \simeq (S^1 \times \Sigma^2 \times R^3)$.

(IV.4) PROPOSITION :

Pour $h \geqslant 0$ et $\omega \neq 0$, $M^6(h,\omega)$ est difféormorphe à $(S^1 \times \Sigma^2 \times R^3)$.

Preuve : L'inégalité $V^2(d) + 2h\,\omega^2 > 0$ étant vérifiée, on a

$$M^2(h,\omega) = V' \quad \text{et} \quad M^3(h,\omega) \simeq S^1 \times \Sigma^2 \quad \text{d'après (IV.2)} .$$

Soit $E = \{ (u,v) \in \hat{S}^3 \times R^6 \mid A(u)v = \Omega \}$, où $\Omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$,

et soit p la projection

$$p : E \longrightarrow \hat{S}^3 .$$

$$(u,v) \rightsquigarrow u$$

L'espace E est un fibré trivial de fibre R^3 au dessus de $\hat{S}^3$; il est difféomorphe à $(S^3 \times R^3)$.

L'application $\gamma : M^6(h,\omega) \longrightarrow E$

$$(x,y) \rightsquigarrow \gamma(x,y) = \left(\frac{x}{\|x\|} , \frac{y}{\|x\|} \right)$$

est un plongement puisque $\gamma^{-1}[(u,v)] = (\|x\|u, \|x\|v)$, où $\|x\|$ est la seule racine positive de l'équation

$$\|v\|^2 = \left[2h + \frac{2\,U(u)}{\|x\|} \right] \|x\|^2 \quad .$$

De plus on vérifie que

$$\gamma[M^6(h,\omega)] = p^{-1}[M^3(h,\omega)] \quad .$$

Il en résulte que $M^6(h,\omega) \simeq (S^1 \times \Sigma^2 \times R^3)$.

(IV.5) LEMME :

Si $h < 0$ et $\omega \neq 0$ alors pour tout $u \in M^3(h,\omega)$, $\pi^{-1}(u)$ est une sphère à trois dimensions de centre $y_u = \frac{U(u)}{\omega} A_3'(u)$ et de rayon $r = \frac{1}{\omega}\left[U^2(u)+2h\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}$, où

$$A_3'(u) = (-m_1 u^2, m_1 u^1, -m_2 u^4, m_2 u^3, -m_3 u^6, m_3 u^5) \quad .$$

Preuve : D'après (II.3) on a pour tout $u \in M^3(h,\omega)$:

$$\pi^{-1}(u) = \left\{ (x,y) \in M^6(h,\omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} x = \lambda u,\ \lambda \in [a(u), b(u)] \\ \\ \lambda A(u)y = \Omega\ ,\quad \|y\|^2 = 2h + \frac{2}{\lambda} U(u) \end{array} \right\}$$

avec $$a(u) = \frac{1}{2h}\left[(U^2(u) + 2h\omega^2)^{\frac{1}{2}} - U(u)\right] ,$$

$$b(u) = \frac{-1}{2h}\left[(U^2(u) + 2h\omega^2)^{\frac{1}{2}} + U(u)\right] ,$$

les deux racines de l'équation $2h\lambda^2 + 2\,U(u)\lambda - \omega^2 = 0$.

Pour λ donné appartenant à $[a(u) , b(u)]$ l'espace

$$Y(\lambda) = \{ y \in R^6 \mid \lambda A(u)y = \Omega \}$$

est difféomorphe à R^3.

Un calcul simple permet de démontrer que le point $y(\lambda)$ défini par

$$y(\lambda) = \frac{\omega}{\lambda} A_3'(u) \equiv \frac{\omega}{\lambda} \left[-m_1u^2, m_1u^1, -m_2u^4, m_2u^3, -m_3u^6, m_3u^5\right]$$

est le point unique de $y(\lambda)$ de norme minimale.

Le sous-espace

$$\{y \in Y(\lambda) \mid \|y\|^2 = 2h + \frac{2\,U(u)}{\lambda}\}$$

de $Y(\lambda)$ est une sphère à deux dimensions qui se réduit au point $y(a) = \frac{\omega}{a(u)} A_3'(u)$ lorsque λ tend vers $a(u)$, et au point $y(b) = \frac{\omega}{b(u)} A_3'(u)$ lorsque λ tend vers $b(u)$, on en déduit que $\pi^{-1}(u)$ est une sphère de dimension 3. Précisons son centre et son rayon. Soit

$$y_u = \frac{1}{2}(y(a) + y(b)) = \frac{\omega(a+b)}{ab} A_3'(u) = \frac{U(u)}{\omega} A_3'(u) .$$

Montrons que $\|y - y_u\|$ ne dépend que de u. On a

$$\|y - y_u\|^2 = \frac{1}{m_1}\left[(y_1 + m_1 \frac{U(u)}{\omega} u^2)^2 + (y_2 - m_1 \frac{U(u)}{\omega} u^1)^2\right] +$$

$$\frac{1}{m_2}\left[(y_3 + m_2 \frac{U(u)}{\omega} u^4)^2 + (y_4 - m_2 \frac{U(u)}{\omega} u^3)^2\right] +$$

$$\frac{1}{m_3}\left[(y_5 + m_3 \frac{U(u)}{\omega} u^6)^2 + (y_6 + m_3 \frac{U(u)}{\omega} u^5)^2\right] ,$$

$$\|y - y_u\|^2 = \|y\|^2 + \frac{U^2(u)}{\omega^2} - \frac{2\,U(u)}{\omega} A_3(u)\, y .$$

or $\|y\|^2 = 2h + \frac{2\,U(u)}{\lambda}$ et $A_3(u)y = \frac{\omega}{\lambda}$, d'où :

$$\|y - y_u\|^2 = \frac{U^2(u) + 2h}{\omega^2} \text{ et } \|y - y_u\| = r = \left[\frac{U^2(u) + 2h\omega^2}{\omega}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi pour $h < 0$ et $\omega \neq 0$ $\pi^{-1}(u)$ est une sphère à trois dimensions de centre $y_u = \frac{U(u)}{\omega} A_3'(u)$ et de rayon r.

Cette sphère se réduit au point

$$y_{u_o} = \sqrt{-2h}\; A_3'(u_o) ,$$

pour tout point $u_\circ \in M^3(h,\omega)$ tel que $U^2(u_\circ) + 2h\omega^2 = 0$.

(IV.6) PROPOSITION :

Pour $\omega \neq 0$, $h < 0$ et $V^2(d) + 2h\omega^2 > 0$ on a

$$M^6(h,\omega) \simeq S^1 \times \Sigma^2 \times S^3 \quad .$$

Preuve : On remarque que $M^2(h,\omega)$ ∇' , d'où, d'après (IV.2) ,

$$M^3(h,\omega) \simeq S^1 \times \Sigma^2 \quad .$$

D'après (IV.5), $\pi^{-1}(u)$ est un S^3 pour tout $u \in M^3(h,\omega)$.

Soit $\beta: M^6(h,\omega) \longrightarrow M^3(h,\omega) \times S^3$

$$(x,y) \rightsquigarrow (u,v) = \beta(x,y) = \left(\frac{x}{\|x\|} , \frac{y - y_u}{\|y - y_u\|} \right) ,$$

où $y_u = \frac{U(u)}{\omega} A_3'(u)$.

Pour $(x,y) \in M^6(h,\omega)$ on obtient sans équivoque

$u = \frac{x}{\|x\|}$, $r = \|y - y_u\| = \frac{1}{\omega} \left[U^2(u) + 2h\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}$ et

$v = \frac{y - y_u}{\|y - y_u\|}$. Inversement, (u,v) détermine y_u et r, puis

$y = rv + y_u$ et la norme de x via l'équation $\|y^2\| = 2h + \frac{2\,U(u)}{\|x\|}$.

Donc β est une bijection C^∞ ; c'est un difféomorphisme et l'on a bien

$$M^6(h,\omega) \simeq S^1 \times \Sigma^2 \times S^3 \quad .$$

(IV.7) LEMME :

Si $V^2(d) < -2h\omega^2 < V^2(a)$, alors il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\pi^{-1}(X)$, où

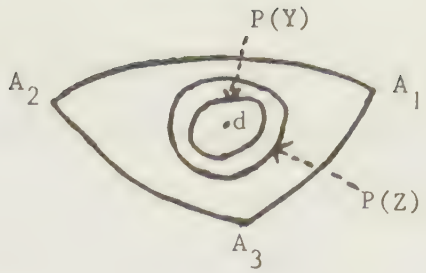
$$X = \{u \in M^3(h,\omega) \mid U^2(u) + 2h\omega^2 \leqslant \varepsilon \} ,$$

soit difféomorphisme à deux copies de $(S^1 \times S^1 \times D^4)$, D^4 étant un disque de dimension quatre :

Preuve : L'intersection S de l'octant positif $s^1 > 0$, $s^2 > 0$, $s^3 > 0$ avec

l'ellipsoïde

$$\frac{(s^1)^2}{m_1} + \frac{(s^2)^2}{m_2} + \frac{(s^3)^2}{m_3} = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1\, m_2\, m_3}$$



est convexe. L'intersection Σ_c de l'octant positif avec la surface d'équation

$$V(s)\quad m_1\, m_2\, m_3 \left(\frac{1}{m_1\, s^1} + \frac{1}{m_2\, s^2} + \frac{1}{m_3\, s^3} \right) = c > 0$$

est concave. Il en résulte que $S \cap \Sigma_c \simeq S^1$.

Lorsque $c > 0$ varie, Σ_c subit des homothéties centrées à l'origine. Il en résulte que pour $\varepsilon > 0$ assez petit,

$P(X) = \left\{ s \in \nabla \mid V^2(s) + 2h\omega^2 \leqslant \varepsilon \right\}$, qui est la réunion des $S \cap \Sigma_c$,

$\left[-2h\omega^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leqslant c \leqslant \left[\varepsilon - 2h\omega^2 \right]^{\frac{1}{2}}$, est une couronne C à l'intérieur de ∇ , entourant d , de bord intérieur

$$P(Y) = \{ s \in \nabla \mid V^2(s) + 2h\omega^2 = 0 \} \simeq S^1$$

et de bord extérieur

$P(Z) = \{ s \in \nabla \mid V^2(s) + 2h.\omega^2 = \varepsilon \} \simeq S^1$, où Y et Z désignent les sous-ensembles de X :

$$Y = \{ u \in M^3(h,\omega) \mid U^2(u) + 2h\omega^2 = 0 \} ,$$

$$Z = \{ u \in M^3(h,\omega) \mid U^2(u) + 2h\omega^2 = \varepsilon \} .$$

On déduit de (IV.2) que $Y \simeq 2(S^1 \times S^1)$, $Z \simeq 2(S^1 \times S^1)$ et $X \simeq 2(S^1 \times S^1 \times [0,1])$, où $2(\,)$ signifie "deux copies disjointes de $(\,)$" . Autrement dit X est difféomorphe au produit de S^1 par la réunion de deux couronnes disjointes tracées sur la sphère S^2, qu'on a déjà notée Σ^2, privée de trois points, obtenue en identifiant deux copies de ∇ le long de $\partial\nabla$ en ôtant les trois sommets. Une composante connexe X^+ (ou X^-) de X est donc encore difféomorphe à $S^1 \times C$, où $S^1 = \{ \varphi \pmod{2\pi} \}$. Des coordonnées globales sur X^+ sont donc (φ, s^1, s^2) . Nous doterons X^+

d'une métrique riemannienne (par exemple $d\varphi \otimes d\varphi + ds^1 \otimes ds^1 + ds^2 \otimes ds^2$) , qui permet de parler du gradient de $f \in C^1(X^+,\mathbb{R})$.

$U : X^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ ne dépend que des distances

$u \longmapsto U(u)$

mutuelles s^1,s^2,s^3 des points (u^1,u^2), (u^3,u^4), (u^5,u^6) .

Donc $U(u) = U(u')$ si $P(u) = s = s' = P(u')$ et U s'identifie à une fonction sur la couronne C ; à savoir $U(u) = V(s) = f(s^1,s^2)$

$$U(u) = V(s) = f(s^1,s^2) = m_1 m_2 m_3\left(\frac{1}{m_1 s^1} + \frac{1}{m_2 s^2} + \frac{1}{m_3 s^3}\right)$$ où $s^3 > 0$ est donnée par

$$\frac{(s^1)^2}{m_1} + \frac{(s^2)^2}{m_2} + \frac{(s^3)^2}{m_3} = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 \quad m_2 \quad m_3} .$$

Le gradient de U sur X^+ (ou de f sur C) ne s'annule pas, car

$$\frac{\partial f}{\partial s^i} = \frac{m_1 m_2 m_3}{m_i}\left[-\frac{1}{(s^1)^2} + \frac{s^i}{(s^3)^3}\right], \quad i = 1,2,$$

qui ne s'annule qu'au point d, extérieur à C .

Adoptons une paramétrisation de $P(Y)$: $\theta \pmod{2\pi}$.

Chaque point n de C est bien défini par la valeur de f en ce point et par le paramètre θ du point où la ligne intégrale de gradient de f, issu de n, coupe $P(Y)$. Ainsi

$$\left(\varphi \pmod{2\pi} , \theta \pmod{2\pi} , \sqrt{-2h\omega^2} \leqslant f \leqslant \sqrt{\varepsilon - 2h\omega^2} \right)$$

sont des coordonnées globales sur X^+ .

Posons $\ell = \frac{1}{\varepsilon^2}(f^2 + 2h.\omega^2)$. Puisque f et grad f ne s'annulent pas sur C,

$$(\varphi , \theta , f) \longmapsto (\varphi , \theta , \ell)$$

est un difféomorhisme et

$$(\varphi \pmod{2\pi} , \theta \pmod{2\pi} , 0 \leqslant \ell \leqslant 1)$$

sont encore des coordonnées globales sur X^+ .

D'après le lemme(IV.5) , $\pi^{-1}(\varphi_o, \theta_o, \ell_o)$ est une sphère S^3 de rayon $r = \frac{\varepsilon}{\omega}\sqrt{\ell_o}$. Ce rayon s'annule si $\ell_o = 0$. L'image inverse par π de chaque ligne intégrale $(\varphi_o, \theta_o, 0 \leqslant \ell \leqslant 1)$ de $\overrightarrow{\text{grad}}\ U$ est donc un paraboloïde de révolution de base S^3 qui est $\simeq D^4$. Il s'ensuit que

$$\pi^{-1}\{(\varphi \,(\text{mod.}2\pi),\ \theta(\text{mod.}2\pi)\ ,\ 0 \leqslant \ell \leqslant 1)\} \simeq S^1 \times S^1 \times D^4\ ,$$

donc $\pi^{-1}(X) \simeq 2(S^1 \times S^1 \times D^4)$.

(IV.8). LEMME

$S^5 \simeq (S^1 \times D^4) \cup (D^2 \times S^3)$, où $\partial(S^1\ D^4)$ est identifiée à $\partial(D^2 \times S^3)$ selon $\partial D^2 = S^1$, $S^3 = \partial D^4$, D^i étant le disque de dimension i .

Preuve : Si $u = (u^1, u^2, \ldots, u^6)$, soient

$$S^5 = \{u \in \mathbb{R}^6 \mid \sum_{i=1}^{6} (u^i)^2 = 1\}\ ,\quad S^1 = \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid (u^1)^2 + (u^2)^2 = \tfrac{1}{2}\}\ ,$$

$$D^2 = \{u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid (u^1)^2 + (u^2)^2 \leqslant \tfrac{1}{2}\}\ ,$$

$$D^4 = \{u^3, u^4, u^5, u^6) \in R^4 \mid \sum_{i=3}^{6} (u^i)^2 \leqslant \tfrac{1}{2}\}\ ,$$

$$S^3 = \{u^3, u^4, u^5, u^6) \in R^4 \mid \sum_{i=3}^{6} (u^i)^2 = \tfrac{1}{2}\}\ .$$

Soient $A = \{u \in S^5 \mid (u^1)^2 + (u^2)^2 \leqslant \frac{1}{2}\}$ et

$$B = \{u \in S^5 \mid (u^1)^2 + (u^2)^2 \geqslant \tfrac{1}{2}\}\ .$$

Il est clair que $S^5 = A \cup B$ et que $A \cap B \simeq S^1 \times S^3$.

D'autre part l'application

$$f : D^2 \times S^3 \longrightarrow A$$
$$\left[(u^1,u^2)\ ,\ (u^3,u^4,u^5,u^6)\right] \longmapsto (u^1, u^2, u'^3, u'^4, u'^5, u'^6)\ ;$$

où

$$u'^i = \sqrt{2}\ u^i \left[1 - (u^1)^2 - (u^2)^2\right]^{\frac{1}{2}}\ ,\ \text{pour}\ i = 3, 4, 5, 6,$$

est un difféomorphisme ; d'où

$$A \simeq D^2 \times S^3$$

De même l'application

$$g : S^1 \times D^4 \longrightarrow B$$

$$\left[(u^1,u^2),\ (u^3,u^4,u^5u^6)\right] \rightsquigarrow (u'^1,u'^2,u^3,u^4,u^5,u^6) \ ,$$

où

$$u'^i = \sqrt{2}\ u^i \left[1 - \sum_{i=3}^{6} (u^i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \text{ , pour } i = 1, 2,$$

est un difféomorphisme ; d'où

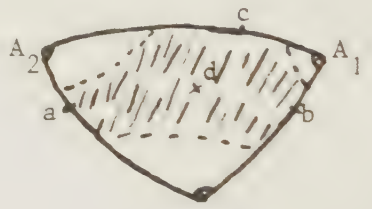
$$B \simeq S^1 \times D^4 \ ; \qquad \text{c.q.f.d.}$$

(IV.9) PROPOSITION :

Si $V^2(c) < -2\ h\omega^2$ alors $M^6(h,\omega)$ est difféomorphe à trois copies disjointes de $(S^1 \times S^1 \times R^4)$.

Preuve:

Si $V^2(c) < -2\ h\omega^2$, $M^2(h,\omega)$ comprend alors trois composantes connexes disjointes aux voisinages respectifs des trois sommets de ∇ .



D'après (IV.2), on en déduit que $M^3(h,\omega)$ provient de trois calottes fermées disjointes de Σ^2 entourant respectivement les trois sommets exclus. Donc $M^3(h,\omega)$ est difféomorphe à trois copies disjointes de l'espace.

$$S^1 \times (D^2 - 1 \text{ point}) \ ,$$

où $(D^2-1$ point) est un disque du plan R^2 privé d'un point intérieur.

Soient

$$X = \{u \in M^3(h,\omega) \mid U^2(u) + 2h\omega^2 \leqslant \varepsilon\}$$

$$Y = \{u \in M^3(h,\omega) \mid U^2(u) + 2h\omega^2 = 0\} \ ,$$

$$Z = \{u \in M^3(h,\omega) \mid U^2(u) + 2h\omega^2 = \varepsilon\} \ , \text{ où } \varepsilon > 0 \text{ est assez petit.}$$

Il est clair que $Y \simeq 3(S^1 \times S^1)$, $Z \simeq 3(S^1 \times S^1)$, où $3(S^1 \times S^1)$ désigne l'ensemble de trois copies disjointes du produit $(S^1 \times S^1)$. De même

$$\overline{\left[M^3(h,\omega) - X\right]} \simeq 3\left[S^1 \times (D^2 - 1 \text{ point})\right] ,$$

où $\overline{\left[M^3(h,\omega) - X\right]}$ désigne la fermeture du complémentaire de X dans $M^3(h,\omega)$, et où $3\left[S^1 \times (D^2 - 1 \text{ point})\right]$ est la réunion disjointe de trois copies de $\left[S^1 \times (D^2 - 1 \text{ point})\right]$.

D'après (IV.5) on a

$$\pi^{-1}(Z) \simeq 3(S^1 \times S^1 \times S^3) ,$$

$$\pi^{-1}\overline{\left[(M^3(h,\omega) - X)\right]} \simeq 3\left[S^1 \times (D^2 - 1 \text{ point}) \times S^3\right] .$$

D'autre part, il est facile d'adapter la preuve de (IV.7) au cas où $V^2(C) < -2h\omega^2$, pour montrer que

$$\pi^{-1}(X) \simeq 3\overline{\left[S^1 \times S^1 \times D^4\right]} ,$$

où $3\left[S^1 \times S^1 \times D^4\right]$ désigne l'ensemble de trois copies disjointes de $\left[S^1 \times S^1 \times D^4\right]$.

La relation évidente $Z = X \cap \overline{\left[M^3(h,\omega) - X\right]}$ entraîne

$$\pi^{-1}(Z) = \pi^{-1}(X) \cap \pi^{-1}(\left[M^3(h,\omega) - X\right]) .$$

On conclut alors de ce qui précède que $M^6(h,\omega)$ est difféomorphe à trois copies disjointes de l'espace $(S^1 \times F)$, où F est l'espace obtenu à partir de la réunion

$$\left[(D^2 - 1 \text{ point}) \times S^3\right] \cup (S^1 \times D^4)$$

en identifiant la frontière $(S^1 \times \partial D^4)$ de $(S^1 \times D^4)$ à la composante connexe $(\partial D^2 \times S^3)$ de la frontière de $\left[(D^2 - 1 \text{ point}) \times S^3\right]$. Selon $S^1 = \partial D^2$ et $\partial D^4 = S^3$

Or, d'après (IV.8), $S^5 = A \cup B$ avec $A \simeq D^2 \times S^3$, $B \simeq S^1 \times D^4$ et $A \cap B = S^1 \times S^3$, d'où

$$F \simeq (S^5 - S^3) ,$$

où $(F^5 - S^3)$ est l'espace obtenu à partir de S^5 en privant le disque $D^2 \subset A$ d'un point à son intérieur.

Montrons que $(S^5 - S^3) \simeq S^1 \times R^4$.

Prenons le point exclu de D^2 au centre de ce disque. Soit

$$h : (S^5 - S^3) \longrightarrow R^6$$

$$u \rightsquigarrow y = h(u)$$

où $(S^5 - S^3) = \{u \in R^6 \mid \sum_{i=1}^{6} (u^i)^2 = 1 , (u^1)^2 + (u^2)^2 \neq 0 \}$,

$$y^i = \frac{u^i}{\sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2}^2} \quad (i = 1, 2, \ldots 6) .$$

Evidemment

$$\{ (y^1, y^2) \mid y^i = \frac{u^i}{\sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2}^2} , \ i = 1, 2, \} \simeq S^1 ,$$

$$\{ (y^3, y^4, y^5, y^6) \mid y^i = \frac{u^i}{\sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2}^2} , \ i = 3, 4, 5, 6\} \simeq R^4 .$$

D'où $h\left[(S^5 - S^3)\right] \simeq S^1 \times R^4$.

Or l'application h^{-1} existe et est définie par

$$u^j = y^j \left[\sum_{i=1}^{6} (y^i)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} ,$$

pour tout $y \in h\left[(S^5 - S^3)\right]$, il en résulte que $(S^5 - S^3) \simeq S^1 \times R^4$

Ceci montre que $M^6(h,\omega)$ est difféomorphe à trois copies de l'espace produit d'un tore $(S^1 \times S^1)$ par R^4 .

(IV.10) PROPOSITION :

Si $V^2(b) < - 2h\omega^2 < V^2(c)$ alors $M^6(h,\omega)$ est difféomorphe à la réunion disjointe des deux espaces

$$(S^1 \times S^1 \times R^4) \quad \text{et} \quad S^1 \times (S^5 - 2\, S^3) ,$$

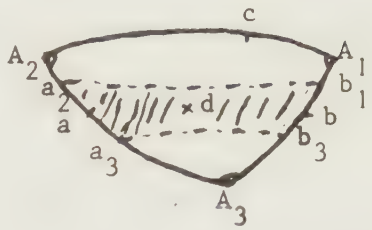
où $(S^5 - 2\, S^3)$ est S^5 privée de deux copies disjointes de S^3 .

Preuve : On a $M^2(h,\omega) = \left[\nabla' - (D_{a_b} - \Gamma)\right]$,

où

$$\Gamma = \overset{\frown}{a_2\ b_1} \cup \overset{\frown}{a_3\ b_3} = \{ s \in \nabla' \mid V^2(s) + 2h\omega^2 = 0\} ,$$

D_{ab} étant la surface de ∇' délimitée par $\overset{\frown}{a_3\ a_2}$, Γ et $\overset{\frown}{b_1\ b_3}$ (Voir figure)



D'après (IV.2) $M^3(h,\omega)$ comprend alors deux calottes disjointes privées d'un point et de deux points distincts respectivement.

On en déduit que

$$M^3(h,\omega) \simeq S^1 \times \left[(D_1^2 - 2 \text{ points}) \cup (D_2^2 - 1 \text{ point})\right] ,$$

où D_1^2 et D_2^2 sont deux disques disjoints du plan R^2 .

Soient

$$X = \{u \in M^3(h,\omega) \mid U^2(u) + 2h\omega^2 \leqslant \varepsilon \} ,$$

$$Y = \{u \in M^3(h,\omega) \mid U^2(u) + 2h\omega^2 = 0\} ,$$

$$Z = \{u \in M^3(h,\omega) \mid U^2(u) + 2h\omega^2 = \varepsilon \} .$$

On a $P^{-1}(\Gamma) = Y \simeq S^1 \times (\partial D_1^2 \cup \partial D_2^2) \simeq 2(S^1 \times S^1)$,

$$Z = 2(S^1 \times S^1) ,$$

$$\overline{\left[M^3(h,\omega) - X\right]} \simeq S^1 \times \left[(D_1^2 - 2 \text{ points}) \cup (D_2^2 - 1 \text{ point})\right] ,$$

où $\overline{\left[M^3(h,\omega) - X\right]}$ désigne la fermeture du complémentaire de X dans $M^3(h,\omega)$.

D'après (IV.5) on a

$$\pi^{-1}(Z) \simeq 2(S^1 \times S^1) \times S^3 ,$$

$$\pi^{-1}\left(\overline{\left[M^3(h,\omega) - X\right]}\right) \simeq S^1 \times \left[(D_1^2 - 2 \text{ points}) \cup (D_2^2 - 1 \text{ point})\right] \times S^3 .$$

D'autre part il est facile d'adapter la preuve de (IV.7) , au cas où

$V^2(b) < -2h\omega^2 < V^2(c)$, pour montrer que

$$\pi^{-1}(X) \simeq 2(S^1 \times S^1 \times D^4) .$$

Or $\pi^{-1}(Z) = \pi^{-1}(X) \cap \pi^{-1}\left(\overline{\left[M^3(h,\omega) - X\right]}\right)$, donc $M^6(h,\omega)$ est difféomorphe à la réunion disjointe des deux espaces

$$(S^1 \times E) \quad \text{et} \quad S^1 \times F \ ,$$

où $E = \left[(D_1^2 - 2 \text{ points}) \times S^3\right] \cup (S^1 \times D^4)$, la frontière de $(S^1 \times D^4)$ étant identifiée à la composante connexe $(\partial D_1^2 \times S^3)$ de la frontière de $\left[(D_1^2 - 2 \text{ points}) \times S^3\right]$ selon $S^1 = \partial D_1^2$ et $\partial D^4 = S^3$ et F étant

$$\overline{\left[(D_2^2 - 1 \text{ point}) \times S^3\right] \cup (S^1 \times D^4)} \ ,$$

la frontière de $(S^1 \times D^4)$ étant identifiée à la composante connexe $(\partial D_2^2 \times S^3)$ de la frontière de $\left[(D_2^2 - 1 \text{ point}) \times S^3\right]$ selon $S^1 = \partial D_2^2$, $\partial D^4 = S^3$.

D'après la preuve de (IV.9) et le lemme (IV.8) on a

$$F \simeq S^5 - S^3 \simeq S^1 \times S^1 \times R^4 \ ,$$

$$E \simeq (S^5 - 2\, S^3) \ ,$$

où $(S^5 - 2\, S^3)$ s'obtient à partir de S^5 en privant le disque D^2, situé dans la partie A ($\simeq D^2 \times S^3$) de S^5 , de deux points distincts à son intérieur .

(IV.11) PROPOSITION :

Si $V^2(a) < -2h\omega^2 < V^2(b)$ alors $M^6(h,\omega)$ est difféomorphe à l'espace

$$S^1 \times (S^5 - 3S^3) \ ,$$

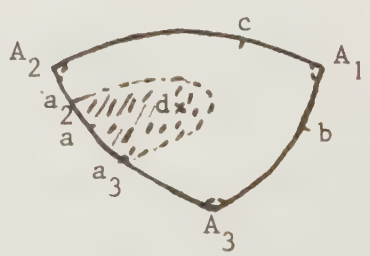
où $(S^5 - 3S^3)$ est S^5 privé de trois copies disjointes de S^3 .

Preuve : On a

$$M^2(h,\omega) = \nabla' - (D_a - \Gamma),$$

D_a étant la surface de ∇ délimitée par $\overset{\frown}{a_2\, a\, a_3}$ et par

$$\Gamma = \{ s \in \nabla \mid V^2(s) + 2h\omega^2 = 0 \} \ .$$



On en déduit, d'après (IV.2) , que

$$M^3(h,\omega) \simeq S^1 \times \left[\Sigma^2 - (D'_a - \partial D'_a)\right] \ ,$$

où D'_a est un disque fermé dans Σ^2 privé d'un point intérieur correspondant au

au point $a \in \partial\nabla$.

Evidemment $\left[\Sigma^2_{-} (D'_a - \partial D'_a)\right] \simeq (D^2 - \text{trois points})$, qui est un disque fermé de R^2 privé de trois points distincts à son intérieur.

Les sous-espaces X, Y, Z de $M^3(h,\omega)$, définis comme dans (IV.9) et (IV.10), vérifient

$$Y = P^{-1}(\Gamma) \simeq S^1 \times \partial D^2 \simeq S^1 \times S^1 \quad \text{[d'après (IV.2)]} \ ,$$

$$Z \simeq S^1 \times S^1 \ ,$$

$$\overline{\left[M^3(h,\omega) - X\right]} \simeq S^1 \times (D^2 - 3 \text{ points}) \ ,$$

$$\pi^{-1}\left(\overline{\left[M^3(h,\omega) - X\right]}\right) \simeq S^1 \times (D^2 - 3 \text{ points}) \times S^3 \quad \text{[(d'après (IV.5)]} \ ,$$

$$\pi^{-1}(Z) \simeq S^1 \times S^1 \times S^3 \quad \text{[(d'après (IV.5)]} \ .$$

or

$$\pi^{-1}(Z) = \pi^{-1}(X) \cap \pi^{-1}\left(\overline{\left[M^3(h,\omega) - X\right]}\right) \ , \text{ donc}$$

$M^6(h,\omega)$ est difféomorphe à l'espace $S^1 \times E_3$, où

$$E_3 = \left[(D^2 - 3 \text{ points}) \times S^3\right] \cup (S^1 \times D^4) \ ,$$

la frontière de $(S^1 \times D^4)$ étant identifiée à la composante connexe $(\partial D^2 \times S^3)$ de la frontière de $\left[(D^2 - 3 \text{ points}) \times S^3\right]$ selon $S^1 = \partial D^2$ et $\partial D^4 = S^3$.

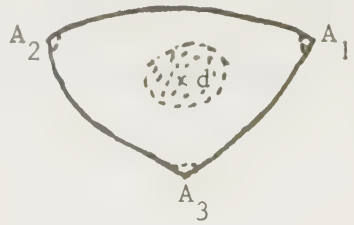
Mais, d'après le lemme (IV.8), E_3 n'est autre que l'espace $(S^5 - 3S^3)$ obtenu à partir de S^5 en privant le disque D^2, de trois points distincts, situé dans la partie $A(\simeq D^2 \times S^3)$ de S^5 .

(IV.12) PROPOSITION :

Si $V^2(d) < -2h\omega^2 < V^2(a)$ alors $M^6(h,\omega)$ est difféomorphe à l'espace $S^1 \times E$, où E est l'espace obtenu à partir de l'espace $(S^5 - 3S^3)$ par une chirurgie consistant à retirer une copie de $(D^2 \times S^3)$ et à la remplacer par une copie de $(\partial D^2 \times D^4)$; $(S^5 - 3S^3)$ étant S^5 privé de trois copies disjointes de S^3.

Preuve : On a $M^2(h,\omega) = \nabla' - (D - \partial D)$, où D est un disque fermé de ∇, contenant d , dont la frontière est $\partial D = \{s \in \nabla' \mid V^2(s) + 2h\omega^2 = 0\}$. On en déduit d'après (IV.2) que

$$M^3(h,\omega) \simeq S^1 \times \left[\Sigma^2 - (D' - \partial D')\right] \ ,$$



où D' est la réunion de deux disques fermés disjoints de Σ^2 .

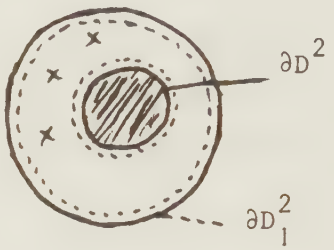
Evidemment

$$\left[\Sigma^2 - (D' - \partial D')\right] \simeq \left[D_1^2 - (D^2 - \partial D^2) - 3 \text{ points}\right] ,$$

D^2 étant un disque contenu à l'intérieur du disque D_1^2 .

Ainsi $M^3(h,\omega)$ est le produit de S^1 par une couronne fermée privée de trois points distincts.

Les sous-espaces X, Y, Z de $M^3(h,\omega)$ définis dans (IV.7) vérifient , d'après (IV.2) ,



$$Y \simeq S^1 \times (\partial D_1^2 \cup \partial D^2) \simeq S^1 \times (S^1 \cup S^1) ,$$

$$Z \simeq S^1 \times (S^1 \cup S^1) \text{ et}$$

$$\overline{\left[M^3(h,\omega) - X\right]} \simeq S^1 \times \left[D_1^2 - (D^2 - \partial D^2) - 3 \text{ points}\right] .$$

De plus, d'après (IV.5) ,

$$\pi^{-1}\left(\overline{\left[M^3(h,\omega) - X\right]}\right) \simeq S^1 \times \left[D_1^2 - (D^2 - \partial D^2) - 3 \text{ points}\right] \times S^3 \text{ et}$$

$$\pi^{-1}(Z) \simeq S^1 \times (S^1 \cup S^1) \times S^3 .$$

D'après (IV.7), $\pi^{-1}(X) \simeq 2(S^1 \times S^1 \times D^4)$; or

$$\pi^{-1}(Z) = \pi^{-1}(X) \cap \pi^{-1}\left(\overline{\left[M^3(h,\omega) - X\right]}\right) , \text{ donc}$$

$M^6(h,\omega)$ est difféomorphe à l'espace

$$S^1 \times E ,$$

où E est l'espace obtenu à partir de

$$\left\{\left[D_1^2 - (D^2 - \partial D^2) - 3 \text{ points}\right] \times S^3\right\} \cup \left[2(S^1 \times D^4)\right]$$

en identifiant les deux composantes connexes de la frontière de $\left[2(S^1 \times D^4)\right]$ respectivement aux deux composantes connexes

$(\partial D_1^2 \times S^3)$ et $(\partial D^2 \times S^3)$ de la frontière de

$$\left[D_1^2 - (D^2 - \partial D^2) - 3 \text{ points}\right] \times S^3 .$$

Or, d'après le lemme (IV.8), l'espace

$$\left[(D_1^2 - 3 \text{ points}) \times S^3\right] \cup (\partial D_1^2 \times D^4) , \text{ où}$$

$$\left[(D_1^2 - 3 \text{ points}) \times S^3\right] \cap (\partial D_1^2 \times D^4) = \partial D_1^2 \times S^3 ,$$

n'est autre que l'espace $(S^5 - 3S^3)$ obtenu en privant le disque D^2_1 (où $A \simeq D^2_1 \times S^3$) , situé dans la partie A de S^5, de trois points distincts à son intérieur. Donc l'espace E s'obtient à partir de $(S^5 - 3S^3)$ en retirant une copie de $(D^2 \times S^3)$ et en la remplaçant par une copie de $(\partial D^2 \times D^4)$, D^2 étant un disque intérieur à D^2_1 .

c.q.f.d.

CHAPITRE V.

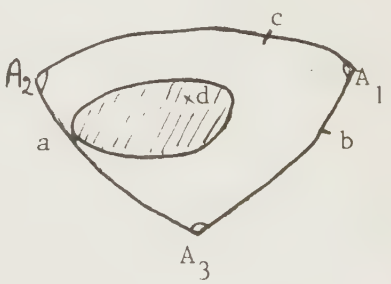
ETUDE DES CAS LIMITES

Dans ce chapitre nous allons caractériser $M^6(h,\omega)$ topologiquement dans le cas où $(-2h\omega^2)$ coïncide avec l'une des valeurs de $V^2(s)$ aux points a, b, c et d. Nous montrerons que $M^6(h,\omega)$ est le produit de S^1 par un espace ayant au plus trois points critiques non dégénérés.

Dans toute la suite $(S^5 - S^3)$, $(S^5 - 2S^3)$ et $(S^5 - 3S^3)$ seront les espaces obtenus, à partir de $(D_1^2 \times S^3) \cup (S^1 \times D^4) \simeq S^5$, en privant le disque D_1^2 respectivement d'un point, de deux points distincts, ou de trois points distincts en son intérieur.

(V.1) PROPOSITION :

Si $V^2(a) = -2h\omega^2 < V^2(b)$ alors $M^6(h,\omega)$ est le produit de S^1 par un espace E_a obtenu à partir de $(S^5 - 3S^3)$ en identifiant deux points de la sphère S^5 .



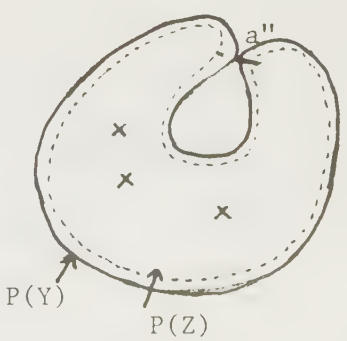
Preuve: On a $M^2(h,\omega) = \nabla' - (D - \partial D)$, où D étant un disque fermé de ∇' , contenant d et dont la frontière touche $\widehat{A_2 A_3}$ au point a .

On a alors d'après (IV.2)

$$M^3(h,\omega) \simeq S^1 \times \left[\Sigma^2 - (D' - \partial D')\right] ,$$

où D' est la réunion de deux disques fermés dans Σ^2 se touchant extérieurement au point a'.

Evidemment $\left[\Sigma^2 - (D' - \partial D')\right]$ est difféomorphe à un disque D^2 ayant deux points a_1 et a_2 de sa frontière identifiés en un point a" (Voir figure) et dont l'intérieur est privé de trois points distincts.



Soient $X = \{u \in M^3(h,\omega) \mid U^2(u) + 2h\omega^2 \leqslant \varepsilon\}$

$Y = \{u \in M^3(h,\omega) \mid U^2(u) + 2h\omega^2 = 0\}$,

$Z = \{u \in M^3(h,\omega) \mid U^2(u) + 2h\omega^2 = \varepsilon\}$,

Il est clair que

$Z \simeq S^1 \times S^1$,

$Y \simeq S^1 \times (\partial D^2)$, où (∂D^2) est un cercle ayant deux points identifiés en a" .

On peut modifier la preuve de (IV.7) pour démontrer que

$$\pi^{-1}(X) \simeq S^1 \times G_a \ ,$$

où G_a est l'espace obtenu à partir de $S^1 \times D^4$ en identifiant deux de ses points (a_1, y_{a_1}) et (a_2, y_{a_2}) au même point $(a", y_a)$. En effet, puisque $a \in \partial\nabla'$, d'après (IV.2) ,

$$P^{-1}(a) \simeq S^1 \times \{a'\} \simeq S^1 \times \{a"\} \simeq S^1 \ .$$

Mais, d'après (IV.5), pour tout $u_o \in P^{-1}(a)$

$$\pi^{-1}(u_o) = y_{u_o} = \sqrt{-2h}\, A_3'(u_o)$$

Ce qui fait que $\pi^{-1} \circ P^{-1}(a) \simeq S^1 \times \{(a", y_a)\}$,

où y_a est un y_{u_o} obtenu pour $u_o = (0,a")$.

D'après le lemme (IV.5) on a

$$\pi^{-1}\left(\overline{\left[M^3(h,\omega) - X\right]}\right) \simeq S^1 \times (D^2 - 3 \text{ points}) \times S^3 \ ,$$

$$\pi^{-1}(Z) \simeq S^1 \times S^1 \times S^3 \ .$$

Or $\pi^{-1}(Z) = \pi^{-1}(X) \cap \pi^{-1}\left(\overline{\left[M^3(h,\omega) - X\right]}\right) \simeq S^1 \times S^1 \times S^3$;

donc, d'après le lemme (IV.8), $M^6(h,\omega)$ est le produit de S^1 par l'espace E_a obtenu à partir de $(S^5 - 3S^3)$ en identifiant deux points de la partie $(S^1 \times D^4)$ de S^5 .

(V.2) PROPOSITION .

Si $V^2(a) < V^2(b) = -2h\omega^2 < V^2(c)$ alors $M^6(h,\omega)$ est le produit de S^1

par la réunion E_b des deux espaces

$$S^5 - S^3 \simeq S^1 \times R^4 \quad \text{et} \quad (S^5 - 2S^3)$$ qui se touchent en un point unique

Preuve : on a

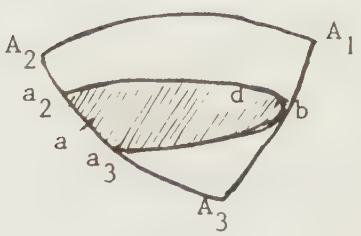
$$M^2(h,\omega) = \nabla' - (D - \Gamma) ,$$

où D est une région fermée de ∇' ,

délimitée par $\widehat{a_2\ a\ a_3}$ et par

$$\Gamma = \{s \in \nabla \mid V^2(s) + 2h\omega^2 = 0 \},$$

qui contient le point b.



Il est clair que

$$M^3(h,\omega) \simeq S^1 \times \left[(D_1^2 - 2 \text{ points}) \cup (D_2^2 - 1 \text{ point})\right] ,$$

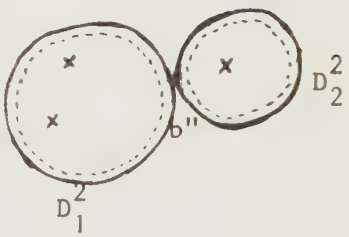
où D_1^2 et D_2^2 sont deux disques du plan tangents extérieurement en b''.

Soient

$$X = \{u \in M^3(h,\omega) \mid U^2(u) + 2h\omega^2 \leqslant \varepsilon\},$$

$$Y = \{u \in M^3(h,\omega) \mid U^2(u) + 2h\omega^2 = 0\},$$

$$Z = \{u \in M^3(h,\omega) \mid U^2(u) + 2h\omega^2 = \varepsilon\}.$$



On a $Z \simeq S^1 \times (S^1 \cup S^1)$

$Y \simeq S^1 \times (\partial D_1^2 \cup \partial D_2^2)$, $(\partial D_1^2 \cup \partial D_2^2)$ est la réunion de deux cercles tangents extérieurement (en b'') .

On peut modifier la preuve de (IV.7) pour démontrer que

$$\pi^{-1}(X) \simeq S^1 \times G_b ,$$

où G_b est l'espace obtenu à partir de $(S^1 \times D_1^4) \cup (S^1 \times D_2^4)$ en identifiant les deux points (b_1, y_{b_1}) et (b_2, y_{b_2}) appartenant respectivement à $(S^1 \times D_1^4)$ et $(S^1 \times D_2^4)$. En effet on a d'après (IV.2) $P^{-1}(b) \simeq S^1 \times \{b''\} \simeq S^1$, mais d'après (IV.5), pour tout $u_\circ \in P^{-1}(b)$ $\pi^{-1}(u_\circ) = y_{u_\circ} = \sqrt{-2h}\ A'_3(u_\circ)$

On en déduit que

$$\pi^{-1} \circ P^{-1}(a) \simeq S^1 \times \{(b'', y_b)\} ,$$

où y_b est un $y_{u_\circ}$ obtenu pour $u_\circ = (0,b'')$. Ainsi (b'',y_b) est le point commun unique aux deux espaces $(S^1 \times D_1^4)$ et $(S^1 \times D_2^4)$ dont la réunion donne G_b.

D'après le lemme (IV.5) on a

$$\pi^{-1}(Z) \simeq S^1 \times \left[(S^1 \times S^3) \cup (S^1 \times S^3)\right] ,$$

$$\pi^{-1}\left(\overline{\left[M^3(h,\omega) - X\right]}\right) \simeq S^1 \times \left(\left[(D^2 - 2 \text{ points}) \times S^3\right] \cup \left[(D^2 - 1 \text{ point}) \times S^3\right]\right.$$

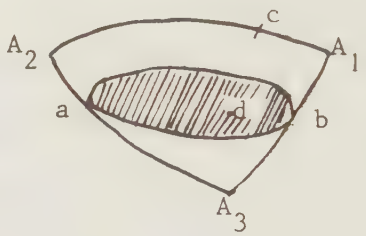
or $\pi^{-1}(Z) = \pi^{-1}(X) \cap \pi^{-1}\left(\overline{\left[M^3(h,\omega) - X\right]}\right)$, donc, d'après (IV.8), $M^6(h,\omega)$ est le produit de S^1 par la réunion E_b des deux espces $(S^5 - 2S^3)$ et $(S^5 - S^3)$ qui se touchent en un point unique (b'', y_b) .

(V.3) PROPOSITION :

Si $V^2(a) = V^2(b) = 2h\omega^2 < V^2(c)$ alors $M^6(h,\omega)$ est le produit de S^1 par la réunion E_{ab} des deux espaces $(S^5 - 2S^3)$ et $(S^5 - S^3)$ qui se touchent en deux points distincts.

Preuve : On a $M^2(h,\omega) = \nabla' - (D - \partial D)$,

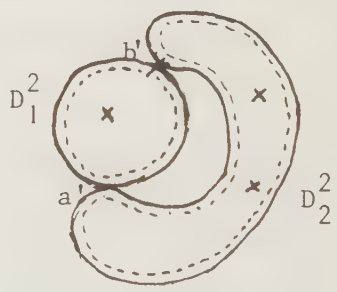
où D est un disque, fermé de ∇', dont la frontière ∂D passe par a et b.



On en déduit, d'après (IV.2), que

$M^3(h,\omega) \simeq S^1 \times \left[(D_1^2 - 1 \text{ point}) \cup (D_2^2 - 2 \text{ points})\right]$,

où D_1^2 et D_2^2 sont deux disques fermés du plan se touchant en deux points a' et b' distincts sur leur bord (Voir figure) .



Soient $X = \{u \in M^3(h,\omega) \mid U^2(u) + 2h\omega^2 \leqslant \varepsilon\}$,

$Y = \{u \in M^3(h,\omega) \mid U^2(u) + 2h\omega^2 = 0\}$,

$Z = \{u \in M^3(h,\omega) \mid U^2(u) + 2h\omega^2 = \varepsilon\}$.

On a $Z \simeq S^1 \times (S^1 \cup S^1)$,

$Y \simeq S^1 \times (\partial D_1^2 \cup \partial D_2^2)$

$$\overline{\left[M^3(h,\omega) - X\right]} \simeq S^1 \times \left[(D^2 - 2 \text{ points}) \cup (D^2 - 1 \text{ point})\right] .$$

On peut modifier la preuve de (IV.7) pour démontrer que

$$\pi^{-1}(X) \simeq S^1 \times G_{a_b} ,$$

où G_{ab} est l'espace obtenu à partir de

$$(S^1 \times D_1^4) \cup (S^1 \times D_2^4)$$

en identifiant deux points (a_1, y_{a_1}) et (b_1, y_{b_1}) de $(S^1 \times D_1^4)$ respectivement à deux points (a_2, y_{a_2}) et (b_2, y_{b_2}) de $(S^1 \times D_2^4)$. En effet il est facile de montrer que $\pi^{-1} \circ P^{-1}(b) \simeq S^1 \times (b', y_b)$,

$$\pi^{-1} \circ P^{-1}(a) \simeq S^1 \times (a', y_a) \quad ,$$

où y_a et y_b s'obtiennent à partir de $y_{u_\circ} = \sqrt{-2h}\, A_3'(u_\circ)$ en remplaçant $u_\circ$ par $(0,a')$ et $(0,b')$ respectivement, ce qui montre que $(S^1 \times D_1^4)$ et $(S^1 \times D_2^4)$ n'ont que deux points communs

$$(a', y_a) \text{ et } (b', y_b) \quad .$$

D'autre part on a d'après le lemme (IV.5) :

$$\pi^{-1}(Z) \simeq S^1 \times \left[(S^1 \times S^3) \cup (S^1 \times S^3)\right] ,$$

$$\pi^{-1}\left(\overline{\left[M^3(h,\omega) - X\right]}\right) \simeq S^1 \times \left\{\left[(D^2\text{-2 points}) \times S^3\right] \cup \left[(D^2\text{- 1 point}) \times S^3\right]\right\} .$$

Ainsi $M^6(h,\omega)$ est le produit de S^1 par la réunion E_{ab} des deux espaces $(S^5 - 2S^3)$ et $(S^5 - S^3)$ se touchant en deux points distincts.

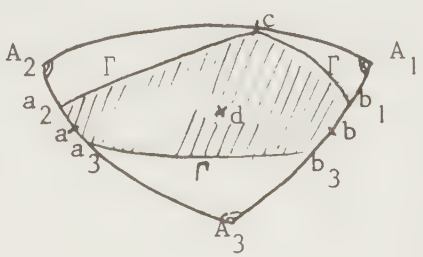
(V.4) PROPOSITION :

Si $V^2(a) \leqslant V^2(b) < V^2(c) = -2h\omega^2$ alors $M^6(h,\omega)$ est le produit de S^1 par la réunion de trois copies de l'espace $(S^5 - S^3)$, l'une des trois copies étant disjointe des deux autres qui ont un point commun.

Preuve : On a

$$M^2(h,\omega) = \nabla' - (D - \Gamma) ,$$

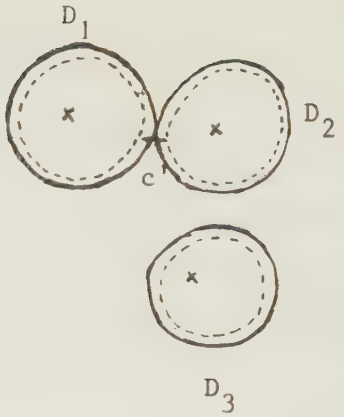
D étant la région fermée de ∇' délimitée par $\overset{\frown}{a_2 a_3}$, $\overset{\frown}{b_3 b_1}$ et par $\Gamma = \{s \in \nabla' \mid V^2(s) + 2h\omega^2 = 0\}$.



Cela entraîne que

$$M^3(h,\omega) \simeq S^1 \times \left[(D_1\text{- 1 point}) \cup (D_2\text{- 1 point}) \cup (D_3\text{- 1 point})\right] ,$$

D_3 étant un disque du plan disjoint des deux autres qui sont tangents extérieurement



au point c'

En posant

$$X = \{u \in M^3(h,\omega) \mid U^2(u) + 2h\omega^2 \leqslant \varepsilon\},$$

$$Y = \{u \in M^3(h\ \omega) \mid U^2(u) + 2h\omega^2 = 0\},$$

$$Z = \{u \in M^3(h,\omega) \mid U^2(u) + 2h\omega^2 = \varepsilon\},$$

on a

$$Z \simeq 3(S^1 \times S^1)$$

$Y \simeq S^1 \times \left[S^1 \cup (\partial D_1 \cup \partial D_2)\right]$, $(\partial D_1 \cup \partial D_2)$ étant la réunion de deux cercles tangents extérieurement en c',

$$\overline{\left[M^3(h,\omega) - X\right]} \simeq 3\left[S^1 \times (D^2 - 1 \text{ point})\right] .$$

D'autre part on peut modifier la preuve de (IV.7) pour démontrer que $\pi^{-1}(X)$ est difféomorphe au produit de S^1 par la réunion de trois copies de $(S^1 \times D^4)$, dont l'une d'elles est disjointe de deux autres, qui se touchent en un point (c', y_c)

Autrement dit

$$\pi^{-1}(X) \simeq S^1 \times \left[(S^1 \times D^4_3) \cup G_c\right] ,$$

où $G_c = (S^1 \times D^4_1) \cup (S^1 \times D^4_2)$ avec $(S^1 \times D^4_1) \cap (S^1 \times D^4_2) = \{(c', y_c)\}$.

En effet il est facile de montrer, d'après (IV.2) et (IV.5) , que

$$\pi^{-1} \circ P^{-1}(c) \simeq S^1 \times \{c', y_c\} ,$$

où y_c est égal à $y_{u_o} = \sqrt{-2h}\, A'_3(u_o)$ pris pour $u_o = (0,c')$.

Ceci entraîne que $(S_1 \times D^4_1)$ et $(S^1 \times D^4_2)$ n'ont qu'un point commun unique.

D'après le lemme (IV.5) on a

$$\pi^{-1}(Z) \simeq 3(S^1 \times S^3) = \text{trois copies disjointes de } (S^1 \times S^3) ,$$

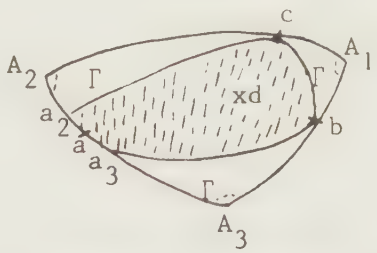
$$\pi^{-1}\left(\overline{\left[M^3(h,\omega) - X\right]}\right) \simeq 3\left[S^1 \times (D^2 - 1 \text{ point}) \times S^3\right] ,$$

mais $\pi^{-1}(Z) = \pi^{-1}(X) \cap \pi^{-1}\left(\overline{\left[M^3(h,\omega) - X\right]}\right)$ donc en utilisant le lemme (IV.8) ,

$M^6(h,\omega)$ est le produit de S^1 par la réunion de trois copies de $(S^5 - S^3)$ l'une des copies étant disjointe des deux autres , qui ont un point commun (c', y_c) et dont la réunion sera notée E_c

(V.5) PROPOSITION :

Si $V^2(a) < V^2(b) = V^2(c) = -2h\omega^2$ alors $M^6(h,\omega)$ est le produit de S^1 par la réunion E_{bc} de trois copies de $(S^5 - S^3)$, l'une de ces copies ayant un point commun avec chacune des deux autres.



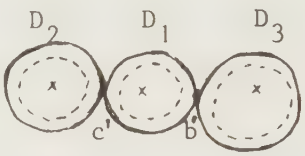
Preuve : On a $M^2(h,\omega) = \nabla' - (D - \Gamma)$, D étant la région fermée de ∇' délimitée par $\overset{\frown}{a_2\ a\ a_3}$ et par $\Gamma = \overset{\frown}{a_2\ c\ b\ a_3} = \{s \in \nabla' \mid V^2(s) + 2h\omega^2 = 0\}$.

On peut montrer, d'après (IV.2), que

$$M^3(h,\omega) \simeq S^1 \times \left[(D_1 - 1 \text{ point}) \cup (D_2 - 1 \text{ point}) \cup (D^3 - 1 \text{ point})\right] ,$$

Les trois disques du plan D_1, D_2 et D_3 étant tels que D_1 soit tangent extérieurement aux deux autres.

En utilisant les preuves de (V.2) et de (V.4) et les notations antérieures on peut vérifier que



$$\pi^{-1}(X) \simeq S^1 \times G_{bc} ,$$

où G_{bc} est l'espace $(S^1 \times D_2^4) \cup (S^1 \times D_1^4) \cup (S^1 \times D_3^4)$,

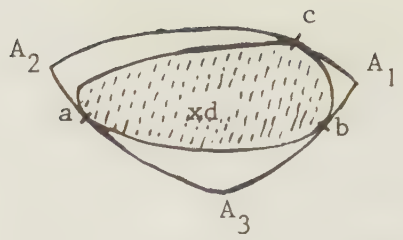
avec $\{(c', y_c)\} = (S^1 \times D_2^4) \cap (S^1 \times D_1^4)$,

$\{(b', y_b)\} = (S^1 \times D_1^4) \cap (S^1 \times D_3^4)$; D_i^4 étant des disques de dimension 4 $(i = 1, 2, 3)$; $\pi^{-1}\left(\overline{\left[M^3(h,\omega) - X\right]}\right) \simeq 3\left[S^1 \times (D^2 - 1 \text{ point}) \times S^3\right]$,

$\pi^{-1}(Z) \simeq 3(S^1 \times S^1 \times S^3)$. Pour achever la preuve il suffit d'utiliser le lemme (IV.8) .

(V.6) PROPOSITION :

Si $V^2(a) = V^2(b) = V^2(c) = -2h\omega^2$ alors $M^6(h,\omega)$ est le produit de S^1 par la réunion E_{abc} de trois copies de l'espace $(S^5 - S^3)$, les trois copies ayant deux à deux un point commun.



Preuve : On a

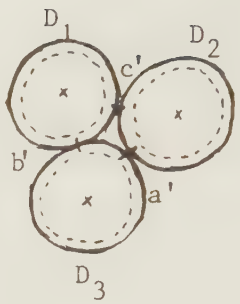
$$M^2(h,\omega) = \nabla' - (D - \partial D) \quad ,$$

où D est un disque fermé dont le bord passe par a, b et c .

On vérifie que

$$M^3(h,\omega) \simeq S^1 \times \left[(D_1 - 1 \text{ point}) \cup (D_2 - 1 \text{ point}) \cup (D_3 - 1 \text{ point})\right] ,$$

où D_1, D_2 et D_3 sont trois disques du plan tangents deux à deux extérieurement.



En utilisant les preuves de (V.3) et de (V.4) on peut démontrer que $\pi^{-1}(X) \simeq S^1 \times G_{abc}$, où G_{abc} est l'espace $(S^1 \times D_1^4) \cup (S^1 \times D_2^4) \cup (S^1 \times D_3^4)$,

avec $(S^1 \times D_1^4) \cap (S^1 \times D_2^4) = \{(c', y_c)\}$,

$(S^1 \times D_2^4) \cap (S^1 \times D_3^4) = \{(a', y_a)\}$, $(S^1 \times D_3^4) \cap (S^1 \times D_1^4) = \{(b', y_b)\}$,

les D_i^4 étant des disques de dimension quatre.

De même on a

$$\pi^{-1}\left(\overline{\left[M^3(h,\omega) - X\right]}\right) \simeq 3\left[S^1 \times (D^2 - 1 \text{ point}) \times S^3\right] ,$$

$$\pi^{-1}(Z) \simeq 3(S^1 \times S^1 \times S^3)$$

$$\pi^{-1}(Z) = \pi^{-1}(X) \cap \pi^{-1}\left(\overline{\left[M^3(h,\omega) - X\right]}\right) .$$

Alors pour achever la preuve il suffit d'utiliser (IV.8) .

(IV.7) PROPOSITION :

Si $V^2(d) = -2h\omega^2$ alors $M^6(h,\omega)$ est difféomorphe au produit de S^1 par un espace E_d obtenu à partir de $(\Sigma^2 \times S^3)$ en identifiant chacun des deux sous-espaces

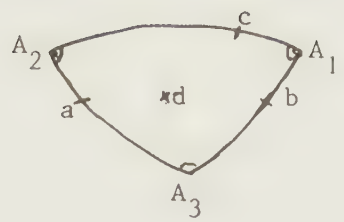
$$\{d_1\} \times S^3 \quad \text{et} \quad \{d_2\} \times S^3 \quad \text{à un point, où } d_1, d_2 \in \Sigma^2 .$$

Preuve : On a, d'après (III) ,

$$M^2(h,\omega) = \nabla'$$

ce qui donne d'après (IV.2) :

$$M^3(h,\omega) \simeq S^1 \times \Sigma^2 .$$



Mais pour tout $u_o \in P^{-1}(d) \simeq S^1 \times (\{d_1\} \cup \{d_2\})$, où $d_1, d_2 \in \Sigma^2$, on peut écrire, d'après (IV.5),

$$\pi^{-1}(u_o) \simeq y_{u_o} = \sqrt{-2h}\, A_3'(u_o) ,$$

alors que pour $u \in \left[M^3(h,\omega) - P^{-1}(d)\right]$, $\pi^{-1}(u) \simeq S^3$.

Donc $\pi^{-1} \circ P^{-1}(d) \simeq S^1 \times \left[\{(d_1, y_{d_1})\} \cup \{(d_2, y_{d_2})\}\right]$, où

$$(d_1, y_{d_1}) \in \Sigma^2 \times S^3 , \quad (d_2, y_{d_2}) \in \Sigma^2 \times S^3 \quad \text{avec}$$

$y_{d_1} = y_{u_o}$ pour $u_o = (0, d_1)$ et $y_{d_2} = y_{u_o}$ pour $u_o = (0, d_2)$

Ainsi $M^6(h,\omega)$ est égal au produit de S^1 par $(\Sigma^2 \times S^3)$ dont les deux sous-espaces $\{d_1\} \times S^3$ et $\{d_2\} \times S^3$ sont réduits à un point.

Nous allons étudier $M^6(h,\omega)$ au voisinage des points d'identification.

(V.8) PROPOSITION :

Si $V^2(a) = -2h\omega^2 < V^2(b)$ alors l'espace E_a, où

$$M^6(h,\omega) \simeq S^1 \times E_a ,$$

possède un point critique non dégénéré d'indice 1 .

Preuve : Paramétrons l'espace E_a . On sait que

$$M^6(h,\omega) = (x,y) \in (R^6 - K) \times R^6 \left\{ \begin{array}{l} x = \|x\| u \ , \ u \in M^3(h,\omega) \text{ et } \|x\| \in \left[a(u), b(u)\right] \\ y_1 + y_3 + y_5 = 0, \|y\|^2 = \frac{2}{\|x\|} U(u) + 2h, \ A_3(u) y = \frac{\omega}{\|x\|} \\ y_2 + y_4 + y_6 = 0, \end{array} \right\}$$

où $M^3(h,\omega) \simeq \{u = (\varphi,\sigma) \in S^1 \times \Sigma^2 \mid U^2(u) + 2h\omega^2 \geqslant 0\}$

En éliminant $\|x\|$ les relations

$$\|y\|^2 = \frac{2}{\|x\|} U(u) + 2h, \quad \text{et} \quad A_3(u)\, y = \frac{\omega}{\|x\|}$$

on obtient

$$(V.8,1) \qquad \|y\|^2 = \frac{2\, U(u)}{\omega} A^3(u)\, y + 2h$$

Ceci montre, que pour φ donné, l'espace $\{\varphi\} \times E_a \simeq E_a$ sera défini paramétriquement par la relation (V.8,1) entre les six paramètres $y_1, y_2, y_3, y_4, \sigma^1, \sigma^2$ indépendants.

Pour simplifier les calculs prenons $\varphi = 0$, ce qui revient à identifier $u = (0, \sigma)$ avec σ d'après les relations (IV.2,8) .

On a d'ailleurs $U(u) \equiv U(\sigma)$, car $U(u)$ ne dépend pas de φ.

Ainsi on a

$$\|y\|^2 = \frac{2\,U(\sigma)}{\omega}\; A^3(\sigma)y + 2\,h,$$

où

$$A^3(\sigma) = \sigma^1\, y_2 - \sigma^2\, y_1 + \sigma^3\, y_4 - \sigma^4\, y_3 + \sigma^5\, y_6 - \sigma^6\, y_5 \quad .$$

or $$\sigma^4 = \sigma^6 = -\frac{m_1\,\sigma^2}{m_2 + m_3} \quad , \quad \sigma^5 = -\frac{1}{m_3}\,(m_1\,\sigma^1 + m_2\,\sigma^3) \quad ,$$

$$y_5 = -\,(y_1 + y_3) \quad , \quad y_6 = -\,(y_2 + y_4) \quad ,$$

d'où :

$$A_3(\sigma)y = -\frac{\nu\sigma^2 y_1}{m_2 + m_3} + \frac{\left[(m_3 + m_1)\sigma^1 + m_2\sigma^3\right]}{m_3}\, y_2 + \frac{\left[m_1\sigma^1 + (m_2 + m_3)\sigma^3\right]}{m_3}\, y_4 \,,$$

où σ^3 est donné en fonction de σ^1 et σ^3 par (IV.2,11) , et $\nu = m_1 + m_2 + m_3$.

Utilisons sur Σ^2 les coordonnées (v^1, v^2, v^3) . Posons

$$\alpha = \sqrt{\frac{\nu}{m_1(m_2 + m_3)}} \quad , \quad \beta = \sqrt{\frac{m_3 + m_1}{m_3\, m_1}}$$

(V.8,2)

$$\gamma = \sqrt{\frac{m_1}{m_3(m_3 + m_1)}} \quad , \quad \delta = \sqrt{\frac{\nu}{m_2(m_3 + m_1)}} \quad ,$$

et $D = A_3(\sigma)y$; les relations (IV.2,12) permettent d'écrire

(V.8,3) $$D = -\alpha v^2\, y_1 + \beta v^1\, y_2 + (\gamma v^1 + \delta v^3)\, y_4,$$

où $$(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 = 1 \quad .$$

La relation (V.8,1) devient

$$(V.8,4) \qquad \|y\|^2 = \frac{2U(v^2,v^3)}{\omega} \; D + 2h \quad ,$$

où $U(v^2,v^3) \equiv U(\sigma)$, et

$$(V.8,5) \qquad \|y\|^2 = \frac{1}{m_1}\left[(y_1)^2+(y_2)^2\right] + \frac{1}{m_2}\left[(y_3)^2+(y_4)^2\right]+\frac{1}{m_3}\left[(y_1+ y_3)^2+ (y_2+ y_4)^2\right] \quad .$$

Rappelons que les coordonnées (s_a^1, s_a^2, s_a^3) du point $a \in \partial V'$ sont telles que : $s_a^1 = s_a^2 + s_a^3$, où $\frac{s^3a}{s^2a} = \rho_1$ est la racine réelle positive de $f_1(\rho_1) = 0$. On en déduit d'après (IV.2,6) que

$\cos \varphi_o = +1$ au point a ; les coordonnées du point $a' \in \Sigma^2$ correspondant au point a s'écrivent alors d'après (IV.2,15)

$$(V.8,6) \qquad \begin{cases} v_a^1 = \sqrt{\dfrac{m_3 m_1}{m_3+ m_1}} \quad s_a^2 = \dfrac{s^2a}{\beta} \quad , \\ v_a^2 = 0 \\ v_a^3 = \sqrt{\dfrac{m_2}{\nu(m_3+ m_1)}} \quad \left[(m_3+ m_1)\rho + m_3\right] s_a^2 \quad , \end{cases}$$

et l'on a de plus, au voisinage du point a' ,

$v^3 > 0$ et $v^1 = +\sqrt{1 - (v^2)^2 - (v^3)^2}$.

D'autre part, d'après (IV.5) , les coordonnées du point y_a , défini dans (V.1), s'écrivent :

$y_a = \sqrt{-2h}\,(0,\, m_1 \sigma_a^1 \;,\; 0 \;,\; m_2 \sigma_a^3 \;,\; 0 \;,\; m_3 \sigma_a^5)$, ou en tenant compte de (IV.2,13) et de (V.8,2)

$$(V.8,7) \qquad \begin{cases} y_{a,1} = 0 \;\;,\;\; y_{a,2} = \sqrt{-2h}\left(\dfrac{v_a^1}{\beta} - \dfrac{\gamma}{\delta\beta} v_a^3\right) \;\;,\;\; y_{a,3} = 0 \\ y_{a,4} = \sqrt{-2h}\;\dfrac{v_a^3}{\delta} \;\;,\;\; y_{a,5} = 0 \;,\; y_{a,6} = -\sqrt{-2h}\left[\dfrac{v_a^1}{\beta} + \dfrac{1}{\delta}(1 - \dfrac{\gamma}{\beta})v_a^3\right] \end{cases}$$

Nous allons développer le premier membre de la relation

$$(V.8,8) \qquad \frac{\|y\|^2 - 2h}{D} - \frac{2U}{\omega}(v^2,v^3) = 0 \quad ,$$

déduite de (V.8,4) , au voisinage du point $(v_a,y_a) \in E_a$, où les paramètres indépen-

dants prennent les valeurs

$$v^2 = 0,\ v^3 = v_a^3\ ,\ y_1 = 0\ ,\ y_2 = y_{a,2},\ y_3 = 0,\ y_4 = y_{a,4},\ y_5 = 0\ ,\ y_6 = y_{a,6}\ .$$

On montrera alors que (v_a, y_a) est un point critique de la fonction g définie par le premier membre de (V.8,8) et qu'il est non dégénéré d'indice 1 .

1) Développement de la fonction $U(v^2, v^3)$ au voisinage de v_a

On sait que

$$U = \frac{m_2\, m_3}{s^1} + \frac{m_3\, m_1}{s^2} + \frac{m_1\, m_2}{s^3}\ ,$$

où $s^3 = \sqrt{\nu - m_2\, m_3 (s^1)^2 - m_3\, m_1 (s^2)^2}$, s^1 et s^2 étant considérés comme deux paramètres indépendants.

Les relations (IV.2,14) permettent d'écrire, d'après (V.8,2),

$$(V.8,9)\quad \begin{cases} s^1 = \gamma v^1 + \delta v^3 = + \gamma \sqrt{1 - (v^2)^2 - (v^3)^2} + \delta v^3\ , \text{ (au voisinage de } v_a) \\ s^2 = \sqrt{\beta^2 (v^1)^2 + \alpha^2 (v^2)^2} = \sqrt{\beta^2 - (\beta^2 - \alpha^2)(v^2)^2 - \beta^2 (v^3)^2}\ , \end{cases}$$

d'où $\dfrac{\partial s^1}{\partial v^2} = -\dfrac{\gamma v^2}{v^1}$, $\dfrac{\partial s^2}{\partial v^2} = (\alpha^2 - \beta^2)\dfrac{v^2}{s^2}$, $\dfrac{\partial s^1}{\partial v^3} = \delta - \gamma \dfrac{v^3}{v^1}$, $\dfrac{\partial s^2}{\partial v^3} = -\dfrac{\beta^2 v^3}{s^2}$

On en déduit qu'au point a

$$\left(\frac{\partial s^1}{\partial v^2}\right)_a = 0\ ,\ \left(\frac{\partial s^2}{\partial v^2}\right)_a = 0\ ,$$

$$\left(\frac{\partial s^1}{\partial v^3}\right)_a = \delta - \gamma \frac{v_a^3}{v_a^1} = \sqrt{\frac{\nu}{m_2(m_3 + m_1)}} - \sqrt{\frac{m_1}{m_3(m_3 + m_1)}} \cdot \sqrt{\frac{m_2}{\nu m_3\, m_1}} \left[(m_3 + m_1)\, \rho_1 + m_3\right]\ ,$$

ou $$\left(\frac{\partial s^1}{\partial v^3}\right)_a = \frac{(m_3 - m_2\, \rho_1)}{\delta\, m_2\, m_3}\ ,$$

$$\left(\frac{\partial s^2}{\partial v^3}\right)_a = -\frac{\beta^2 v_a^3}{s_a^2} = -\frac{\left[(m_3 + m_1)\, \rho_1 + m_3\right]}{\delta\, m_3\, m_1}\ .$$

D'autre part on a $\frac{\partial s^3}{\partial s^2} = -\frac{m_3}{m_2}\frac{s^2}{s^3}$, $\frac{\partial s^3}{\partial s^1} = -\frac{m_3}{m_1}\frac{s^1}{s^3}$,

ce qui donne

$$\frac{\partial U}{\partial s^1} = m_2\, m_3\left[\frac{s^1}{(s^3)^3} - \frac{1}{(s^1)^2}\right] \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial s^2} = m_3\, m_1\left[\frac{s^2}{(s^3)^3} - \frac{1}{(s^2)^2}\right] .$$

On a alors $\left(\frac{\partial U}{\partial v^2}\right)_a = 0$, puis

$$\left(\frac{\partial U}{\partial v^3}\right)_a = \frac{1}{\delta(s_a^2)^2\,\rho_1^2(1+\rho_1)^2}\, f_1(\rho_1) = 0, \quad \text{où}$$

$$f_1(\rho_1) = (m_1+m_3)\rho_1^5+(3m_3+2m_1)\rho_1^4+(3m_3+m_1)\rho_1^3-(3m_2+m_1)\rho_1^2-(3m_2+2m_1)\rho_1-(m_2+m_3) = 0$$

Calculons les dérivées secondes de U pour $v = v_a$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial (v^2)^2} = \left(\frac{\partial s^1}{\partial v^2}\right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial (s^1)^2} + 2\left(\frac{\partial s^1}{\partial v^2}\right)\cdot\left(\frac{\partial s^2}{\partial v^2}\right)\frac{\partial^2 U}{\partial s^1 \partial s^2} + \left(\frac{\partial^2 s^1}{\partial (v^2)^2}\right)\cdot\frac{\partial U}{\partial s^1} + \left(\frac{\partial^2 s^2}{\partial (v^2)^2}\right)\cdot\frac{\partial U}{\partial s^2} +$$

$$+ \left(\frac{\partial s^2}{\partial v^2}\right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial (s^2)^2} ,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial v^2 \partial v^3} = \frac{\partial^2 U}{\partial (s^1)^2}\cdot\left(\frac{\partial s^1}{\partial v^2}\right)\cdot\left(\frac{\partial s^1}{\partial v^3}\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial s^1 \partial s^2}\left(\frac{\partial s^1}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial s^2}{\partial v^3} + \frac{\partial s^1}{\partial v^3}\cdot\frac{\partial s^2}{\partial v^2}\right) +$$

$$\frac{\partial U}{\partial s^1}\cdot\frac{\partial^2 s^1}{\partial v^2 \partial v^3} + \frac{\partial U}{\partial s^2}\cdot\frac{\partial^2 s^2}{\partial v^2 \partial v^3} ,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial (v^3)^2} = \left(\frac{\partial s^1}{\partial v^3}\right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial (s^1)^2} + 2\left(\frac{\partial s^1}{\partial v^3}\right)\left(\frac{\partial s^2}{\partial v^2}\right)\frac{\partial^2 U}{\partial s^1 \partial s^2} + \frac{\partial^2 s^1}{\partial (v^3)^2}\cdot\frac{\partial U}{\partial s^1} + \frac{\partial^2 s^2}{\partial (v^3)^2}\frac{\partial U}{\partial s^2} +$$

$$+ \left(\frac{\partial s^2}{\partial v^3}\right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial (s^2)^2} .$$

Or on a

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial (s^1)^2}\right]_a = m_2\, m_3 \left[\frac{1}{(s^3)^3} + \frac{3m_3}{m_1}\,\frac{(s^1)^2}{(s^3)^5} + \frac{2}{(s^1)^3}\right]_a = \frac{m_2\, m_3}{(s_a^2)^3}\left[\frac{1}{\rho_1^3} + \frac{3m_3(1+\rho_1)^2}{m_1\rho_1^3} + \frac{2}{(1+\rho_1)^3}\right],$$

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial s^2 \partial s^2}\right]_a = \frac{3m_3}{m_2}\cdot\left[\frac{s^2}{(s^3)^5}\cdot m_2\, m_3\, s^1\right]_a = \frac{3(m_3)^2(1+\rho_1)}{(s_a^2)^3\,\rho_1^3},$$

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial (s^2)^2}\right]_a = m_3\, m_1\left[\frac{1}{(s^3)^3} + \frac{3m_3}{m_2}\,\frac{(s^2)^2}{(s^3)^5} + \frac{2}{(s^2)^3}\right]_a = \frac{m_3\, m_1}{(s_a^2)^3}\left[\frac{1}{\rho_1^3} + \frac{3m_3}{m_2\rho_1^5} + 2\right],$$

$$\left[\frac{\partial^2 s1}{\partial (v^2)^2}\right]_a = -\left[\gamma\,\frac{(v^1)^2+(v^2)^2}{(v^1)^3}\right]_a = -\frac{\gamma}{v_a^1},\quad \left[\frac{\partial^2 s1}{\partial v^2 \partial v^3}\right]_a = \left[\frac{-\gamma v^2 v^3}{(v^1)^3}\right]_a = 0,$$

$$\left[\frac{\partial^2 s^2}{\partial (v^2)^2}\right]_a = (\alpha^2-\beta^2)\left[\frac{1}{s^2} + \frac{\beta^2-\alpha^2}{(s^2)^3}\cdot (v^2)^2\right]_a = \frac{\alpha^2-\beta^2}{s_a^2},$$

$$\left[\frac{\partial^2 s^2}{\partial v^2 \partial v^3}\right]_a = \left[\frac{\beta^2(\alpha^2-\beta^2)v^2 v^3}{(s^2)^3}\right]_a = 0,\quad \left[\frac{\partial^2 s^2}{\partial (v^3)^2}\right]_a = -\beta^2\left[\frac{1}{s_a^2} + \beta^2\,\frac{(v_a^3)^2}{(s_a^2)^3}\right] = \frac{-\beta}{(v_a^1)^3},$$

$$\left[\frac{\partial^2 s^1}{\partial (v^3)^2}\right]_a = -\gamma\left[\frac{1}{v^1} + \frac{(v^3)^2}{(v^1)^3}\right]_a = \frac{-\gamma}{(v_a^1)^3},$$

d'où

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial v^2 \partial v^3}\right]_a = 0\ ;$$

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial (v^2)^2}\right]_a = \frac{-\gamma}{v_a^1}\left(\frac{\partial U}{\partial s^1}\right)_a + \frac{(\alpha^2-\beta^2)}{s_a^2}\cdot\left(\frac{\partial U}{\partial s^2}\right)_a = \frac{-1}{(s_a^3)^3}\left\{m_2\left[\frac{1+\rho_1}{\rho_1^3} - \frac{1}{(1+\rho_1)^2}\right] + \frac{m_1\, m_2}{m_2+m_3}\cdot\left(\frac{1}{\rho_1^3} - 1\right)\right\}$$

ou $$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial (v^2)^2}\right]_a = \frac{-\,m_2\left[-(m_2+m_3)(1+3\rho_1+3\rho_1^2) + m_1(\rho_1^3-1)(\rho_1+1)^2\right]}{(s_a^2)^3\,(m_2+m_3)\,\rho_1^3(1+\rho_1)^2}$$

mais $$f_1(\rho_1) = (\rho_1^3-1)(\rho_1+1)^2 m_1 - (3\rho_1^2+3\rho_1+1)\, m_2 + \rho_1^3(\rho_1^2+3\rho_1+3)\, m_3 = 0,$$

d'où

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial (v^2)^2}\right]_a = \frac{-\, m_2\, m_3 (1 + 3\rho_1 + 3\rho_1^2 + 3\rho_1^3 + 3\rho_1^4 + \rho_1^5)}{(m_2 + m_3)(s_a^2)^3\, \rho_1^3\, (1 + \rho_1)^2} = -\, K^2 < 0 \ .$$

Montrons que $\left[\frac{\partial^2 U}{\partial (v^3)^2}\right]_a$ est positive .

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial (v^3)^2}\right]_a = \left[\frac{\partial^2 U}{\partial (s^1)^2}\right]_a \frac{(m_3 - m_2)^2\, \rho_1^2}{\delta^2 (m_2\, m_3)^2} - \frac{6 (m_3)^2}{(s_a^2)^3} \cdot \frac{1+\rho_1}{\rho_1^3} \cdot \frac{(m_3 - m_2\, \rho_1)\left[(m_3 + m_1)\, \rho_1 + m_3\right]}{\delta\, m_2\, m_3 \cdot \delta\, m_3\, m_1} +$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 U}{\partial (s^2)^2}\right]_a \frac{\left[(m_3 + m_1)\, \rho_1 + m_3\right]^2}{\delta^2 (m_3\, m_1)^2} - \frac{\gamma \cdot m_2\, m_3 \left[(1 + \rho_1)^3 - \rho_1^3\right]}{(v_a^1)^3\, \rho_1^3 (1 + \rho_1)^2\, (s_a^2)^2} +$$

$$- \frac{m_3\, m_1}{(s_a^2)^3} \cdot \frac{1 - \rho_1^3}{\rho_1^3} \cdot \frac{\beta^2}{(v_a^1)^2} \ ,$$

où $\left[\frac{\partial^2 U}{\partial (v^3)^2}\right]_a = \frac{m_2\, m_3}{(s_a^2)^3} \left[\frac{1}{\rho_1^3} + \frac{3 m_3}{m_1\, \rho_1^3} (1 + \rho_1)^2 + \frac{2}{(1 + \rho_1)^3}\right] \frac{(m_3 - m_2\, \rho_1)^2}{\delta^2 (m_2\, m_3)^2} +$

$$+ \frac{6 (1 + \rho_1)(m_2\, \rho_1 - m_3)}{(s_a^2)^3\, \delta^2 m_1\, m_2} \left[(m_3 + m_1)\, \rho_1 + m_3\right] +$$

$$+ \frac{m_3\, m_1}{(s_a^2)^3} \left[\frac{1}{\rho_1^3} + \frac{3 m_3}{m_2\, \rho_1^5} + 2\right] \frac{\left[(m_3 + m_1)\, \rho_1 + m_3\right]^2}{\delta^2 (m_3\, m_1)^2} +$$

$$+ \frac{(m_3 + m_1)(\rho_1^3 - 1)(1 + \rho_1)^2 - m_2 \left[(1 + \rho_1)^3 - \rho_1^3\right]}{(s_a^2)^3\, \rho_1^3\, (1 + \rho_1)^2\, (v_a^1)^2} \ .$$

Les deux premiers termes de l'expression du second membre sont positifs (car $m_1 \geqslant m_2 \geqslant m_3$ et $\rho_1 \geqslant 1$) ; montrons que les deux dermiers termes, notés P et Q respectivement, ont une somme positive.

En utilisant la relation $f_1(\rho_1) = 0$ et les relations (V.8,6), Q s'écrit

$$Q = \frac{m_3\left[\rho_1^2 - (1+\rho_1^2)(1+\rho_1)^2\right]}{(s_a^2)^3\ \rho_1^3(1+\rho_1)^2(v_a^1)^2} = \frac{m_3\left[\rho_1^2 - (1+\rho_1)^2(1+\rho_1^2)\right]\left\{\nu\, m_3 m_1 + m_2\left[(m_3+m_1)\rho_1 + m_3\right]^2\right\}}{(s_a^2)^3\ \rho_1^3(1+\rho_1)^2 \cdot \nu\, m_3\, m_1} ,$$

$$\text{or}\quad P = \frac{(m_3+m_1)}{(s_a^2)^3\ \rho_1^5 \cdot \nu\, m_3\, m_1}\left[(\rho_1^2 + 2\rho_1^5)\, m_2 + 3m_3\right]\left[(m_3+m_1)\rho_1 + m_3\right]^2 , \quad \text{d'où}$$

$$P + Q > \frac{-m_2\, m_3(1+\rho_1^2)\left[(m_3+m_1)\rho_1 + m_3\right]^2 + m_2(m_3+m_1)(1+2\rho_1^3)\left[(m_3+m_1)\rho_1 + m_3\right]^2}{(s_a^2)^3\ \rho_1^3 \cdot \nu\, m_3 \cdot m_1} +$$

$$- \frac{\nu\,(m_3)^2 m_1(1+\rho_1^2)}{(s_a^2)^3\ \rho_1^3 \cdot \nu\, m_3\, m_1} ,$$

$$P + Q > \frac{m_2\, m_3(2\rho_1^3 - \rho_1^2)\left[(m_3+m_1)\rho_1 + m_3\right]^2 + m_1\, m_2(1+2\rho_1^3)\left[(m_3+m_1)\rho_1 + m_3\right]^2}{(s_a^2)^3\ \rho_1^3\ \nu \cdot m_3\, m_1} +$$

$$- \frac{\nu\,(m_3)^2 m_1(1+\rho_1^2)}{(s_a^2)^3\ \rho_1^3\, \nu\, m_3\, m_1} ,$$

$$P + Q > \frac{m_2(1+2\rho_1^3)\left[(m_3+m_1)^2\rho_1^2 + (m_3)^2 + 2m_3(m_3+m_1)\rho_1\right] - (m_3)^2(m_1+m_2+m_3)(1+\rho_1^2)}{(s_a^2)^3\ \rho_1^3\ \nu\, m_3} > 0$$

Donc $\left[\dfrac{\partial^2 U}{\partial (v^3)^2}\right]_a = H^2 > 0$, et le développement de U (v^2, v^3) au voisinage de $v_a = (0, v_a^3)$ s'écrit

$$U(v^2, v^3) = \omega\sqrt{-2h} - \frac{1}{2}K^2(v^2)^2 + \frac{1}{2}H^2(v^3 - v_a^3)^2 + 0\left(|v - v_a|^3\right) .$$

2) <u>Développement de (1/D) au voisinage de</u> (v_a, y_a) :

On a $D = -\alpha v^2 y_1 + \beta v^1 y_2 + (\gamma v^1 + \delta v^3) y_4$,

d'où en utilisant (V.8,6) et (V.8,2) et (V.8,7)

$$[D]_a = \beta v_a^1 y_{a,2} + (\gamma v_a^1 + \beta v_a^3)\, y_{a,4} = \sqrt{-2h} \ ,$$

$$\left[\frac{\partial(1/D)}{\partial v^2}\right]_a = \frac{1}{[D^2]_a}\left[\alpha y_1 + \frac{v^2}{v^1}(\beta y_2 + \gamma y_4)\right]_a = 0 \ ,$$

$$\left[\frac{\partial(1/D)}{\partial v^3}\right]_a = \frac{1}{[D^2]_a}\left[\frac{v^3}{v_1}(\beta y_2 + \gamma y_4) - \delta y_4\right]_a = 0 \ ,$$

$$\left[\frac{\partial(1/D)}{\partial y_1}\right]_a = \left[\frac{\alpha v^2}{D^2}\right]_a = 0 \ , \left(\frac{\partial(1/D)}{\partial y_3}\right)_a = 0 \ , \left[\frac{\partial(1/D)}{\partial y_2}\right]_a = \left[-\frac{\beta v^1}{D^2}\right]_a = \frac{\beta v_a^1}{2h} \ ,$$

$$\left[\frac{\partial(1/D)}{\partial y_4}\right]_a = \left[\frac{-(\gamma v^1 + \delta v^3)}{D^2}\right]_a = \frac{\gamma v_a^1 + \delta v_a^3}{2h} \ ,$$

$$\left[\frac{\partial^2(1/D)}{\partial(v^2)^2}\right]_a = \left\{\frac{2}{D^3}\left[\alpha y_1 + \frac{v^2}{v^1}(\beta y_2 + \gamma y_4)\right]^2 + \frac{1}{D^2}\left[\frac{\beta y_2 + \gamma y_4}{v^1} + \frac{(v^2)^2}{(v_1)^3}(\beta y_2 + \gamma y_4)\right]\right\}_a = \frac{1}{\sqrt{-2h}}$$

$$\left[\frac{\partial^2(1/D)}{\partial v^2 \partial v^3}\right]_a = \left\{\frac{2}{D^3}\left[\alpha y_1 + \frac{v^2}{v^1}(\beta y_2 + \gamma y_4)\right]\left[\frac{v^3}{v^1}(\beta y_2 + \gamma y_4) - \delta y_4\right] + \frac{v^2 v^3 (\beta y_2 + \gamma y_4)}{D^2 (v^1)^3}\right\}_a = 0$$

$$\left[\frac{\partial^2(1/D)}{\partial(v^3)^2}\right]_a = \left\{\frac{2}{D^3}\left[\frac{v^3}{v^1}(\beta y_2 + \gamma y_4) - \delta y_4\right]^2 + \frac{1}{D^2}\left[\left(\frac{1}{v^1} + \frac{(v^3)^2}{(v^1)^3}\right)(\beta y_2 + \gamma y_4)\right]\right\}_a = \frac{1}{\sqrt{-2h}\ (v_a^1)^2} \ ,$$

$$\left[\frac{\partial^2(1/D)}{\partial y_1^2}\right]_a = \left[\frac{2}{D^3}(\alpha v^2)\right]_a^2 = 0 \ , \left[\frac{\partial^2(1/D)}{\partial y_1 \partial y_2}\right]_a = \left[\frac{-2}{D^3}(\beta v^1)(\alpha v^2)\right]_a = 0 \ ,$$

$$\left[\frac{\partial^2(1/D)}{\partial y_1 \partial y_3}\right]_a = 0 \ , \left[\frac{\partial^2(1/D)}{\partial y_1 \partial y_4}\right]_a = \left[\frac{-2}{D^3}(\gamma v^1 + \delta v^3)\alpha v^2\right]_a = 0 \ ,$$

$$\left[\frac{\partial^2(1/D)}{\partial y_1 \partial v^2}\right]_a = \left[\frac{\alpha}{D^2} - \frac{2\alpha v_a^2}{D^3}\right]_a = \frac{\alpha}{-2h} \ , \left[\frac{\partial^2(1/D)}{\partial y_1 \partial v^3}\right]_a = \left[\frac{2\alpha v^2}{D^3}\frac{\partial D}{\partial v^3}\right]_a = 0 \ ,$$

$$\left[\frac{\partial^2(1/D)}{\partial(y_2)^2}\right]_a = \left[\frac{2\beta(v^1)^2}{D^3}\right]_a = \frac{-\beta^2 (v_a^1)^2}{h\sqrt{-2h}} \ , \left[\frac{\partial^2(1/D)}{\partial y_2 \partial y_3}\right]_a = 0 \ ,$$

$$\left[\frac{\partial^2(1/D)}{\partial y_2 \partial y_4}\right]_a = \left[\frac{2\beta v^1(\gamma v^1 + \delta v^3}{D^3}\right]_a = \frac{\beta v_a^1 (\gamma v_a^1 + \delta v^3)}{h\sqrt{-2h}} \quad ,$$

$$\left[\frac{\partial^2(1/D)}{\partial y_2 \partial v_2}\right]_a = \left\{\frac{1}{D^2} \frac{\beta v^2}{v^1} - \frac{2}{D^3} \beta v^1 \left[\alpha y_1 + \frac{v^2}{v^1}(\beta y_2 + \gamma y_4)\right]\right\}_a = 0 \quad ,$$

$$\left[\frac{\partial^2(1/D)}{\partial y_2 \partial v^3}\right] = \left\{\frac{\beta v^3}{D^2 v^1} - \frac{2\beta v^1}{D^3}\left[\frac{v^3}{v^1}(\beta y_2 + \gamma y_4) - \delta y_4\right]\right\}_a = \frac{\beta v_a^3}{-2h\, v_a^1} \quad ,$$

$$\left[\frac{\partial^2(1/D)}{\partial (y_4)^2}\right]_a = \left[\frac{2}{D^3}(\gamma v^1 \quad \delta v^3)^2\right]_a = \frac{(\gamma v_a^1 + \delta v_a^3)^2}{-h\sqrt{-2h}} \quad ,$$

$$\left[\frac{\partial^2(1/D)}{\partial y_4 \partial v^2}\right]_a = \left\{\frac{1}{D^2} \cdot \frac{\gamma v^2}{v^1} - \frac{2(\gamma v^1 + \delta v^3)}{D^3}\left[\alpha y_1 + \frac{v^2}{v^1}(\beta y_2 + \gamma y_4)\right]\right\}_a = 0,$$

$$\left[\frac{\partial^2(1/D)}{\partial y_4 \partial v_3}\right]_a = \left\{\frac{1}{D^2}\left(\frac{\gamma v^3}{v^1} - \delta\right) - \frac{2}{D^3} \frac{v^3}{v^1}(\beta y_2 + \gamma y_4) - \delta y_4 \quad (\gamma v^1 + \delta v^3)\right\}_a = -\frac{1}{2h}\left(\frac{\gamma v_a^3}{v_a^1} - \delta\right)$$

On a alors

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{\sqrt{-2h}} + \frac{1}{2h}\left[\beta v_a^1 (y_2 - y_{a,2}) + (\gamma v_a^1 + \delta v_a^3)(y_4 - y_{a,4})\right] +$$

$$+ \frac{1}{-2h\sqrt{-2h}}\left[(\beta v_a^1)^2 (y_2 - y_{a,2})^2 + 2\beta v_a^1 (\gamma v_a^1 + \delta v_a^3)(y_2 - y_{a,2})(y_4 - y_{a,4}) +\right.$$

$$\left. + (\gamma v_a^1 + \delta v_a^3)^2 (y_4 - y_{4,a})^2\right] + \frac{\beta v_a^3}{-2h\, v_a^1}(v^3 - v_a^3)(y_2 - y_{a,2}) +$$

$$+\left(\frac{\gamma v_a^3}{v_a^1} \delta\right) \frac{(v^3 - v_a^3)(y_4 - y_{a,4})}{-2h} + \frac{\alpha}{-2h} v^2 y_1 + \frac{1}{2\sqrt{-2h}}\left[(v^2)^2 + \frac{(v^3 - v_a^3)^2}{(v_a^1)^2}\right] + O(|v - v_a|^3)$$

ou bien

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{\sqrt{-2h}} + \frac{1}{2h}\left[\beta v_a^1 (y_2 - y_{a,2}) + (\gamma v_a^1 + \delta v_a^3)(y_4 - y_{a,4})\right] +$$

$$+ \frac{1}{-2h\sqrt{-2h}}\left[\beta v_a^1(y_2 - y_{a,2}) + (\gamma v_a^1 + \delta v_a^3)(y_4 - y_{a,4})\right]^2 +$$

$$+ \frac{\beta}{-2h}\frac{v_a^3}{v_a^1}(y_2 - y_{a,2})(v^3 - v_a^3) + \left(\frac{\gamma}{v_a^1}\frac{v_a^3}{} - \delta\right)\frac{(v^3 - v_a^3)(y_4 - y_{a,4})}{-2h} +$$

$$+ \frac{\alpha}{-2h} v^2 y_1 + \frac{1}{2\sqrt{-2h}}\left[(v^2)^2 + \frac{(v^3 - v_a^3)^2}{(v_a^1)^2}\right] + O(|v - v_a|^3) \quad .$$

3) Développement de $\|y\|^2$ au voisinage de y_a

On a $$\|y\|^2 = \|y_a\|^2 + \frac{2}{m_1} y_{a,2}(y_2 - y_{a,2}) + \frac{2}{m_3}(y_{a,2} + y_{a,4})(y_2 + y_4 - y_{a,2} - y_{a,4}) +$$

$$+ \frac{2}{m_2} y_{a,4}(y_4 - y_{a,4}) + \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_3}\right)(y_1)^2 + \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}\right)(y_3)^2 + \frac{2}{m_3} y_1 y_3 +$$

$$+ \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_3}\right)(y_2 - y_{a,2})^2 + \frac{2}{m_3}(y_2 - y_{a,2})(y_4 - y_{a,4}) + \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}\right)(y_4 - y_{a,4})^2 \quad ;$$

mais d'après (V.8,2) et (V.8,7) on trouve

$$\frac{2}{m_1} y_{a,2} + \frac{2}{m_3}(y_{a,2} + y_{a,4}) = 2\sqrt{-2h}\,\beta\, v_a^1 \quad ,$$

$$\frac{2}{m_2} y_{a,4} + \frac{2}{m_3}(y_{a,2} + y_{a,4}) = 2\sqrt{-2h}\,(\gamma v_a^1 + \delta v_a^3) \quad ,$$

d'où

$$\|y\|^2 = -2h + 2\sqrt{-2h}\left[\beta\, v_a^1 (y_2 - y_{a,2}) + (\gamma v_a^1 + \delta v_a^3)(y_4 - y_{a,4})\right] +$$

$$+ \left(\frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_1}\right)\left(y_1 + \frac{m_1 y_3}{m_3 + m_1}\right)^2 + \frac{\nu (y_3)^2}{m_2(m_3 + m_1)} +$$

$$+ \left(\frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_1}\right)\left[(y_2 - y_{a,2}) + \frac{m_1(y_4 - y_{a,4})}{m_3 + m_1}\right]^2 + \frac{\nu (y_4 - y_{a,4})^2}{m_2(m_3 + m_1)} \quad ,$$

et $$\|y\|^2 = -2h + 2\sqrt{-2h'}\left[\beta(y_2 - y_{a,2}) + \gamma(y_4 - y_{a,4})\right] v_a^1 + 2\sqrt{-2h'}\, v_a^3 \delta (y_4 - y_{a,4}) +$$

$$+ \left[\beta(y_2 - y_{a,2}) + \gamma(y_4 - y_{a,4})\right]^2 + \delta^2(y_4 - y_{a,4})^2 \quad +$$

$$+ \quad (\beta y_1 + \gamma y_3)^2 + \delta^2 (y_3)^2 \quad .$$

Ecrivons maintenant le développement de $\frac{\|y\|^2 - 2h}{D}$

$$\frac{\|y\|^2 - 2h}{D} = 2\sqrt{-2h} + 2\left[\beta v_a^1 (y_2 - y_{a,2}) + (\gamma v_a^1 + \delta v_a^3)(y_4 - y_{a,4})\right] \quad +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{-2h}} \left\{ \left[\beta(y_2 - y_{a,2}) + \gamma(y_4 - y_{a,4})\right]^2 + \delta^2 (y_4 - y_{a,4})^2 + (\beta y_1 + \gamma y_3)^2 + \delta^2 (y_3)^2 \right\} +$$

$$- 2\left[\beta v_a^1 (y_2 - y_{a,2}) + (\gamma v_a^1 + \delta v_a^3)(y_4 - y_{a,4})\right] +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{-2h}} \left[\beta v_a^1 (y_2 - y_{a,2}) + (\gamma v_a^1 + \delta v_a^3)(y_4 - y_{a,4})^2\right]^2 \quad +$$

$$+ 2\beta \frac{v_a^3}{v_a^1} (y_2 - y_{a,2})(v^3 - v_a^3) + 2\left(\frac{\gamma v_a^3}{v_a^1} - \delta\right)(v^3 - v_a^3)(y_4 - y_{a,4}) \quad +$$

$$+ 2\alpha v^2 y_1 + \sqrt{-2h}\left[(v^2)^2 + \frac{(v^3 - v_a^3)^2}{(v_a^1)^2}\right] \quad +$$

$$- \frac{2}{\sqrt{-2h}} \left[\beta v_a^1 (y_2 - y_{a,2}) + (\gamma v_a^1 + \delta v_a^3)(y_4 - y_{a,4})\right]^2 + O(|v - v_a|^3) .$$

$$\frac{\|y\|^2 - 2h}{D} = 2\sqrt{-2h} + \frac{1}{\sqrt{-2h}} \left\{ \left[\beta(y_2 - y_{a,2}) + \gamma(y_4 - y_{a,4}) + \sqrt{-2h}\,\frac{v_a^3}{v_a^1}(v^3 - v_a^3)\right]^2 + \right.$$

$$\left. + \left[\delta(y_4, y_{a,4}) - \sqrt{-2h}(v^3 - v_a^3)\right]^2 \right\} - \sqrt{-2h}\,\frac{\left(v^3 v_a^3\right)^2}{(v_a^1)^2} + \sqrt{-2h}\,\frac{(v^3 - v_a^3)^2}{(v_a^1)^2} \quad +$$

$$+ \sqrt{-2h}\,\frac{(v^3 - v_a^3)^2}{(v_a^1)^2} + \sqrt{-2h}\,(v^2)^2 + 2\alpha v^2 y_1 + \frac{1}{\sqrt{-2h}}\left[(\beta y_1 + \gamma y_3)^2 + \delta^2 (y_3)^2\right] + O(3) .$$

Or,

$$\frac{1}{\sqrt{-2h}}\left[(\beta y_1 + \gamma y_3)^2 + \delta^2 (y_3)^2\right] + 2\alpha v^2 y_1 + \sqrt{-2h}(v^2)^2 = \frac{1}{\sqrt{-2h}}\left\{(\gamma^2 + \delta^2)(y_3)^2 + \right.$$

$$+ 2\,\beta\gamma y_1\, y_3 + \frac{\beta^2\gamma^2}{\gamma^2+\delta^2}(y_1)^2 + \frac{\beta^2\delta^2}{\gamma^2+\delta^2}(y_1)^2 + 2\alpha\sqrt{-2h}\,v^2 y_1 + (-2h)\frac{\alpha^2(\gamma^2+\delta^2)}{\beta^2\delta^2}(v^2)^2\Big\} +$$

$$+ \sqrt{-2h}\left[1 - \frac{\alpha^2(\gamma^2+\delta^2)}{\beta^2\delta^2}\right](v^2)^2 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-2h}}\left[\sqrt{\gamma^2+\delta^2}\; y_3 + \frac{\beta\gamma}{\sqrt{\gamma^2+\delta^2}}\, y_1\right]^2 + \frac{1}{\sqrt{-2h}}\left[\frac{\beta\delta}{\sqrt{\gamma^2+\delta^2}}\, y_1 + \frac{\alpha\sqrt{\gamma^2+\delta^2}}{\beta\delta}\sqrt{-2h}\; v^2\right]^2 ,$$

car $\alpha^2(\gamma^2+\delta^2) = \beta^2\delta^2$ d'après (V.8,2) ,

on a alors

$$\frac{\|y\|^2 - 2h}{D} = 2\sqrt{-2h} + \frac{1}{\sqrt{-2h}}\left[\beta(y_2 - y_{a,2}) + \gamma(y_4 - y_{a,4}) + \sqrt{-2h}\,\frac{v_a^3}{v_a^1}(v^3 - v_a^3)\right]^2 +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{-2h}}\left[\delta(y_4 - y_{a,4}) - \sqrt{-2h}\,(v^3 - v_a^3)\right]^2 +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{-2h}}\left(\sqrt{\gamma^2+\delta^2}\; y_3 + \frac{\beta\gamma\, y_1}{\sqrt{\gamma^2+\delta^2}}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{-2h}}(\alpha y_1 + \sqrt{-2h}\, v^2)^2 + O(3) .$$

Nous avons finalement en négligeant les termes du troisième ordre

$$g = \frac{\|y\|^2 - 2h}{D} - \frac{2U(v^2, v^3)}{\omega} = \frac{K^2}{\omega}(v^2)^2 - \frac{H^2}{\omega}(v^3 - v_a^3)^2 + \frac{1}{\sqrt{-2h}}(\alpha y_1 + \sqrt{-2h}\, v^2)^2 +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{-2h}}\left[\beta(y_2 - y_{a,2}) + \gamma(y_4 - y_{a,4}) + \sqrt{-2h}\,\frac{v_a^3}{v_a^1}(v^3 - v_a^3)\right]^2 +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{-2h}}\left(\sqrt{\gamma^2+\delta^2}\; y_3 + \frac{\beta\gamma\, y_1}{\sqrt{\gamma^2+\delta^2}}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{-2h}}\left[\delta(y_4 - y_{a,4}) - \sqrt{-2h}(v^3 - v_a^3)\right]^2 .$$

Posons

$$z_1 = v^2 \quad , \quad z_2 = v^3 - v_a^3 \; ,$$

$$z_3 = \alpha y_1 + \sqrt{-2h}\, v^2 , \quad z_4 = \beta(y_2 - y_{a,2}) + \gamma(y_4 - y_{a,4}) + \sqrt{-2h}\,\frac{v_a^3}{v_a^1}(v^3 - v_a^3) ,$$

$$z_5 = \sqrt{\gamma^2+\delta^2}\; y_3 + \frac{\beta\gamma\, y_1}{\sqrt{\gamma^2+\delta^2}} , \quad z_6 = \delta(y_4 - y_{a,4}) - \sqrt{-2h}\,(v^3 - v_a^3) .$$

Ce changement de variables est régulier car son jacobien est égal à $\beta^2 \delta^2 \neq 0$.

Ainsi la fonction

$$g(v^2, v^3, y_1, y_2, y_3, y_4) = \frac{\|y\|^2 - 2h}{D} - \frac{2U(v^2, v^3)}{\omega}$$

admet un point critique au point (v_a, y_a) et elle s'écrit au voisinage de ce point, au troisième ordre près,

$$g = \frac{K^2}{\omega}(z_1)^2 - \frac{H^2}{\omega}(z_2)^2 + \frac{1}{\sqrt{-2h}}\left[(z_3)^2 + (z_4)^2 + (z_5)^2 + (z_6)^2\right] +$$

On en conclut que (v_a, y_a) est un point critique non dégénéré d'indice 1 pour la fonction g.

Cela montre, qu'au voisinage de ce point, l'espace E_a, où $M^6(h,\omega) \simeq S^1 \times E_a$, est difféomorphe à un cône à deux nappes ayant pour sommet ce point.

(V.9) PROPOSITION :

Si $V^2(a) < V^2(b) = -2h\omega^2 < V^2(c)$ alors l'espace E_b, où $M^6(h,\omega) \simeq S^1 \times E_b$, possède un point critique dégénéré d'indice 1 .

Preuve : Adoptons les notations de (V.8). L'espace E_b sera paramétré par les six variables indépendantes

$$v^2, v^3, y_1, y_2, y_3, \text{ et } y_4$$

qui vérifient la relation

$$\text{(V.9,1)} \qquad \frac{\|y\|^2 - 2h}{D} - \frac{2}{\omega} U(v^2, v^3) = 0$$

Rappelons que les coordonnées (s_b^1, s_b^2, s_b^3) du point $b \in \partial\nabla'$ sont telles que $s_b^2 = s_b^3 + s_b^1$, où $\frac{s_b^1}{s_b^3} = \rho_2$ est la racine réelle positive de l'équation $f_2(\rho_2) = 0$. On en déduit d'après (IV.2,6) que $\cos \varphi_o = +1$ au point b ; les coordonnées du point $b' \in \Sigma^2$ correspondant au point b s'écrivent alors d'après (IV.2,15) .

$$(V.9,2)\quad \begin{cases} v_b^1 = \sqrt{\dfrac{m_3\, m_1}{m_3 + m_1}} \qquad s_b^2 = \dfrac{s_b^2}{\beta} = \dfrac{(1+\rho_2)\, s_b^3}{\beta} \\ v_b^2 = 0 \ , \\ v_b^3 = \sqrt{\dfrac{m_2}{\nu(m_3+m_1)}}\,(m_3\, s_b^1 - m_1\, s_b^3) = \sqrt{\dfrac{m_2}{\nu(m_3+m_1)}}\,(m_3\,\rho_2 - m_1)\, s_b^3 \ , \end{cases}$$

ce qui entraine, puisque $(v_b^1)^2 + (v_b^3)^2 = 1$,

$$(V.9,3)\quad \begin{cases} v_b^3 = v_b^1 \sqrt{\dfrac{m_2}{\nu\, m_3\, m_1}}\ \dfrac{(m_3\,\rho_2 - m_1)}{1+\rho_2} \\ \dfrac{1}{(v_b^1)^2} = \left[1 + \dfrac{m_2}{\nu\, m_3\, m_1} \cdot \dfrac{(m_3\,\rho_2 - m_1)^2}{(1+\rho_2)^2} \right] . \end{cases}$$

Notons qu'au voisinage du point b

$$v^3 < 0 \quad \text{et} \quad v^1 = + \sqrt{1 - (v^2)^2 - (v^3)^2} \ ,$$

car $0 < \rho_2 < 1$.

D'autre part, les coordonnées du point y_b défini dans (V.2) s'écrivent

$y_b = \sqrt{-2h}\ (0,\ m_1\,\sigma_b^1,\ 0,\ m_2\,\sigma_b^3,\ 0,\ m_3\,\sigma_b^5)$, ou, en tenant compte de (IV.2,13) et de (V.8,2) ,

$$(V.9,4)\quad \begin{cases} y_{b,1} = 0 \quad , \quad y_{b,2} = \sqrt{-2h}\left(\dfrac{v_b^1}{\beta} - \dfrac{\gamma}{\delta\beta}\, v_b^3 \right) \quad , \quad y_{b,3} = 0 \ , \\ y_{b,4} = \sqrt{-2h}\ \dfrac{v_b^3}{\delta} \quad , \quad y_{b,5} = 0 \quad , \quad y_{b,6} = -\sqrt{-2h}\left[\dfrac{v_b^1}{\beta} + \dfrac{1}{\delta}\left(1 - \dfrac{\gamma}{\beta}\right) v_b^3 \right] . \end{cases}$$

Nous allons développer au voisinage du point $(v_b,\ y_b) = \left(v_b^2,\ v_b^3,\ y_{b,1} \cdots,\ y_{b,4}\right)$ le premier membre, de (V.9,1), qui est une fonction

$$g(v^2,\ v^3,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4) = \frac{\|y\|^2 - 2h}{D} - \frac{2}{\omega}\ U(v^2, v^3)$$

On montrera alors que $(v_b,\ y_b)$ est un point critique non dégénéré d'indice 1 pour la fonction g.

1) Développement de $U(v^2,v^3)$ au voisinage de v_b .

Au voisinage du point b on peut écrire d'après (VI.2,14) et (V.8,2)

$$(V.9,5)\quad \begin{cases} s^1 = \gamma v^1 + \delta v^3 = \gamma\sqrt{1-(v^2)^2-(v^3)^2} + \delta v^3 \ , \\ s^2 = \sqrt{\beta^2(v^1)^2 + \alpha^2(v^2)^2} = \sqrt{\beta^2 - (\beta^2-\alpha^2)(v^2)^2 - \beta^2(v^3)^2} \ . \end{cases}$$

Les dérivées partielles premières et secondes de U, par rapport à s^1 et s^2, calculées dans (V.8) permettent d'écrire

$$\left[\frac{\partial U}{\partial s^1}\right]_b = \frac{m_2\, m_3}{(s_b^3)^2}\left(\rho_2 - \frac{1}{\rho_2^2}\right) \ , \left[\frac{\partial U}{\partial s^2}\right]_b = \frac{m_3\, m_1}{(s_b^3)^2}\left[1 + \rho_2 - \frac{1}{(1+\rho_2)^2}\right] \ ,$$

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial (s^1)^2}\right]_b = \frac{m_2\, m_3}{(s_b^3)^3}\left[1 + \frac{3m_3}{m_1}\rho_2^2 + \frac{2}{\rho_2^3}\right] \ , \left[\frac{\partial^2 U}{\partial s^1 \partial s^2}\right]_b = \frac{3(m_3)^2}{(s_b^3)^3}\rho_2(1+\rho_2) \ ,$$

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial (s^2)^2}\right]_b = \frac{m_3\, m_1}{(s_b^3)^3}\left[1 + \frac{3m_3}{m_2}(1+\rho_2)^2 + \frac{2}{(1+\rho_2)^3}\right]$$

or (V.9,5) donne, d'après (V.9,2) ,

$$\left[\frac{\partial s^1}{\partial v^3}\right]_b = \left(\delta - \frac{\gamma v^3}{v^1}\right)_b = \frac{m_3\,\rho_2 + m_2 + m_3}{\delta(1+\rho_2)\, m_2\, m_3} \ , \left[\frac{\partial s^1}{\partial v^2}\right]_b = 0 \ ,$$

$$\left[\frac{\partial s^2}{\partial v^3}\right]_b = -\beta^2\,\frac{v_b^3}{s_b^2} = \frac{(m_1 - m_3\,\rho_2)}{\delta(1+\rho_2)\, m_3\, m_1} \ , \left[\frac{\partial s^2}{\partial v^2}\right]_b = 0 \ ,$$

$$\left[\frac{\partial^2 s^1}{\partial (v^2)^2}\right]_b = \frac{-\gamma}{v_b^1} \ , \left[\frac{\partial^2 s^1}{\partial v^2 \partial v^3}\right]_b = 0 \ , \left[\frac{\partial^2 s^1}{\partial (v^3)^2}\right]_b = \frac{-\gamma}{(v_b^1)^3} \ ,$$

$$\left[\frac{\partial^2 s^2}{\partial (v^2)^2}\right]_b = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{s_b^2} \ , \left[\frac{\partial^2 s^2}{\partial v^2 \partial v^3}\right]_b = 0 \ , \left[\frac{\partial^2 s^2}{\partial (v^3)^2}\right]_b = -\beta^2\left[\frac{1}{(s_b^2)} + \frac{\beta^2 (v_b^3)^2}{(s_b^2)^3}\right] = \frac{-\beta}{(v_b^1)^3} \ ,$$

d'où $\left[\frac{\partial U}{\partial v^2}\right]_b = v_b^2 \left[\frac{-\gamma}{v^1} \frac{\partial U}{\partial s^1} + \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{s^2} \frac{\partial U}{\partial s^2} \right]_b = 0,$

$$\left[\frac{\partial U}{\partial v^3}\right]_b = \frac{1}{\delta(1+\rho_2)(s_b^3)^2} \left\{ (m_3 \rho_2 + m_2 + m_3)(\rho_2 - \frac{1}{\rho_2^2}) - (m_3 \rho_1 - m_1) \left[1 + \rho_2 - \frac{1}{(1+\rho_2)^2} \right] \right.,$$

$$\left[\frac{\partial U}{\partial v^3}\right]_b = \frac{1}{\delta(1+\rho_2)^3 (\rho_2)^2 (s_b^3)^2} \cdot f_2(\rho_2) = 0 \ ,$$

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial v^2 \partial v^3}\right]_b = 0 \ , \quad \left[\frac{\partial^2 U}{\partial (v^2)^2}\right]_b = \frac{m_2 \left\{ (m_2 + m_3)(\rho_2^3 - 1)(1+\rho_2)^2 + m_1 \rho_2^2 \left[(1+\rho_2)^3 - 1 \right] \right\}}{s_b^2 (s_b^3)^2 \rho_2^2 (1+\rho_2)^2 (m_2 + m_3)} \ ,$$

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial (v^3)^2}\right]_b = \frac{(m_3 \rho_2 + m_2 + m_3)^2}{\delta^2 (1+\rho_2)^2 m_2 m_3 (s_b^3)^3} \left[1 + \frac{3m_3}{m_1} \rho_2^2 + \frac{2}{\rho_2^3} \right] +$$

$$+ \frac{6(m_1 - m_3 \rho_2)(m_3 \rho_2 + m_2 + m_3) \rho_2 (1+\rho_2)}{\delta^2 (1+\rho_2)^2 m_1 m_2 (s_b^3)^3}$$

$$+ \frac{(m_1 - m_3 \rho_2)^2}{\delta^2 (1+\rho_2)^2 (s_b^3)^3 m_3 m_1} \cdot \left[1 + \frac{3m_3}{m_2} (1+\rho_2)^2 + \frac{2}{(1+\rho_2)^3} \right] +$$

$$- \frac{\gamma m_2 m_3}{(v_b^1)^3 (s_b^3)^2} \cdot \frac{\rho_2^3 - 1}{\rho_2^2} - \frac{\beta m_3 m_1}{(v_b^1)^3 (s_b^3)^2} \left[1 + \rho_2 - \frac{1}{(1+\rho_2)^2} \right]$$

Mais l'équation $f_2(\rho_2) = 0$ peut s'écrire

$$(V.9,6) \quad f_2(\rho_2) = \rho_2^2 \left[(1+\rho_2)^3 - 1 \right] m_1 + (\rho_2^3 - 1)(\rho_2 + 1)^2 m_2 - (3\rho_2^2 + 3\rho_2 + 1) - (3\rho_2^2 + 3\rho_2 + 1) m_3 = 0 \ ,$$

d'où

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial (v^2)^2}\right]_b = \frac{- m_2 m_3 (\rho_2^4 + 2\rho_2^3 + \rho_2^2 + 2\rho_2 + 1)}{(s_b^2)(s_b^3)^2 \rho_2 (1+\rho_2)^2 (m_2 + m_3)} = - K^2 < 0 \ .$$

Montrons que $\left[\frac{\partial^2 U}{\partial (v^3)^2}\right]_b = + H^2 > 0 \ .$

On a

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial (v^3)^2}\right]_b = \frac{(m_3\ \rho_2 + m_2 + m_3)^2}{\delta 2 (1+\rho_2)^2 m_2\ m_3 (s_b^3)^3}\left[1 + \frac{3m_3}{m_1}\ \rho_2^2 + \frac{2}{\rho_2^3}\right] +$$

$$+ \frac{6(m_1 - m_3\ \rho_2)(m_3\ \rho_2 + m_2 + m_3)\ \rho_2\ (1+\rho_2)}{\delta^2 (1+\rho_2)^2\ m_1\ m_2\ (s_b^3)^3} +$$

$$+ \frac{(m_1 - m_3\ \rho_2)^2}{\delta 2 (1+\rho_2)^2\ (s_b^3)^3\ m_3\ m_1}\left[1 + \frac{3m_3}{m^2}(1+\rho_2)^2 + \frac{2}{(1+\rho_2)^3}\right]$$

$$+ \frac{m_2(1-\rho_2^3)(1+\rho_2)^2 - (m_3+m_1)\ \rho_2^2\left[(1+\rho_2)^3 - 1\right]}{\rho_2^2 (1+\rho_2)^3\ (s_b^3)^3\ (v_b^1)^2}$$

Soient P et Q les premier et dernier termes du second membre de $\left[\frac{\partial^2 U}{\partial (v^3)^2}\right]_b$

A l'aide de (V.9,3) et de (V.9,6), Q s'écrit :

$$Q = \frac{-\ m_3\left[(1+\rho_2)^2 (1+\rho_2^2) - \rho_2^2\right]\left[\nu m_3\ m_1 (1+\rho_2)^2 + m_2 (m_1 - m_3\ \rho_2)^2\right]}{\nu\ m_3\ m_1\ \rho_2^2\ (1+\rho_2)^4\ (s_b^3)^3}$$

d'où

$$P+Q > \frac{-\ m_3 \rho_2 (1+\rho_2^2)\left[\nu m_3 m_1 (1+\rho_2)^2 + m_2 (m_1 - m_3\rho_2)^2\right] + (m_3+m_1)(m_3\rho_2 + m_2 + m_3)^2 (m_1 \rho_2^3 + 3m_3 \rho_2^5 + 2m_1)}{(s_b^3)^3 \cdot \nu\ m_3\ m_1\ \rho_2^3 (1+\rho_2)^2}$$

Le numérateur R de cette dernière expression est positif. En effet

$$R = 2m_1(m_3+m_1)(m_2+m_3)^2 + 2m_1(m_3)^2(m_3+m_1)\rho_2^2 + 4m_1 m_3 (m_3+m_1)(m_2+m_3)\rho_2 +$$

$$+ 3m_3\rho_2^5(m_3+m_1)\left[(m_2+m_3)^2 + (m_3\rho_2)^2 + 2m_3(m_2+m_3)\rho_2\right] +$$

$$+ m_1\rho_2^3(m_3+m_1)\left[(m_2+m_3)^2 + m_3(\rho_2)^2 + 2m_3(m_2+m_3)\rho_2\right] +$$

$$- \nu(m_3)^2 m_1(\rho_2 + 2\rho_2^2 + 2\rho_2^3 + 2\rho_2^4 + \rho_2^5) - m_2 m_3 (m_1)^2(\rho_2 + \rho_2^3) +$$

$$- m_2(m_3)^3\rho_2^2(\rho_2 + \rho_2^3) + 2m_1 m_2 (m_3)^2 \rho_2(\rho_2 + \rho_2^3)\ ,$$

d'où $R > 2m_1(m_3+m_1)(m_2+m_3)^2+3m_1\, m_3(m_3+m_1)(m_2+m_3)\rho_2 +$

$$+ \left\{m_1(m_2)^2m_3-m_1(m_3)^3+(m_1)^2\left[(m_2)^2+m_2m_3-(m_3)^2\right]-m_2(m_3)^3\right\}\rho_2^3 +$$

$$+ 2m_1m_2m_3(m_3+m_1)\rho_2^4+m_3(m_3+m_1)\left[3(m_2+m_3)^2-m_2m_3\right]\rho_2^5 \quad .$$

Cette dernière expression est toujours positive pour $m_1 \geqslant m_2 \geqslant m_3$.

Donc $\left[\dfrac{\partial^2 U}{\partial (v^3)^2}\right]_b = +H^2 > 0$ et le développement de U au voisinage de v_a s'écrit

$$U(v^2,v^3) = \omega\sqrt{-2h} - \frac{1}{2}K^2(v^2)^2 + \frac{1}{2}H^2(v^3-v_b^3)^2 + O(|v-v_b|^3) \quad .$$

2) Développement de $\dfrac{\|y\|^2 - 2h}{D}$ au voisinage de (v_b, y_b) :

Pour avoir ce développement le calcul se fait comme dans le paragraphe (V.8) en remplaçant v_a par v_b et y_a par y_b .

On en déduit le développement de $g\,(v^2,v^3, y_1, y_2, y_3, y_4)$ au voisinage de (v_a,y_a), au troisième ordre près,

$$g = \frac{K^2}{\omega}(z_1)^2 - \frac{H^2}{\omega}(z_2)^2 + \frac{1}{\sqrt{-2h}}\left[(z_3)^2+(z_4)^2+(z_5)^2+(z_6)^2\right]$$

où $z_1 = v^2$, $z_2 = v^3 - v_b^3$, $z_3 = \alpha y_1 + \sqrt{-2h}\, v^2$,

$$z_4 = \beta(y_2 - y_{b,2}) + \gamma(y_4 - y_{b,4}) + \sqrt{-2h}\,\frac{v_b^3}{v_b}\,(v^3 - v_b^3) \quad ,$$

$$z_5 = \sqrt{\gamma^2+\delta^2}\, y^3 + \frac{\beta\gamma\, y_1}{\sqrt{\gamma^2+\delta^2}} \quad , \quad z_6 = \delta(y_4 - y_{b,4}) - \sqrt{-2h}\,(v^3 - v_b^3) \quad .$$

Cela montre que (v_b, y_b) est un point critique non dégénéré d'indice 1 pour la fonction g; et l'espace E_b, où $M^6(h,\omega) \simeq S^1 \times E_b$, au voisinage de (v_b, y_b) est difféomorphe à un cône à deux nappes ayant pour sommet ce point.

(V.10) PROPOSITION :

Si $V^2(a) < V^2(b) < V^2(c) = -2h\omega^2$ alors l'espace E_c, où $M^6(h,\omega) \simeq S^1 \times [(S^5 - S^3) \cup E_c]$, possède un point critique non dégénéré d'indice 1.

Preuve : D'après (V.4), l'espace E_c est la réunion de deux copies de $(S^5 - S^3)$ ayant un point commun (c', y_c), c' étant le point de Σ^2 tel que $P^{-1}(c) \simeq S^1 \times \{c'\}$.

En utilisant les notations de (V.8), E_c sera paramétré par les six variables $v^2, v^3, y_1, y_2, y_3, y_4$, liées par la relation

$$(V.10,1) \qquad g(v^2, v^3, y_1, y_2, y_3, y_4) \equiv \frac{\|y\|^2 - 2h}{D} - \frac{2}{\omega} U(v^2, v^3) = 0$$

Rappelons que les coordonnées (s_c^1, s_c^2, s_c^3) du point $c \in \nabla'$ sont telles que $s_c^3 = s_c^1 + s_c^2 = s_c^1(1 + \rho_3)$,

où ρ_3 est la racine réelle positive de l'équation

$$(V.10,2) \qquad f_3(\rho_3) = -(3\rho_3^2 + 3\rho_3 + 1)m_1 + \rho_3^2[(1 + \rho_3)^3 - 1]m_2 + (\rho_3^3 - 1)(\rho_3 + 1)^2 m_3 = 0,$$

On en déduit que $\cos \varphi_0 = -1$, et l'on a, d'après (IV.2,15) les coordonnées du point c'

$$(V.10,3) \begin{cases} v_c^1 = -\sqrt{\dfrac{m_3\, m_1}{m_3 + m_1}} \quad s_c^2 = -\dfrac{\rho_3\, s_c^1}{\beta} \\ v_c^2 = 0 \\ v_c^3 = \sqrt{\dfrac{m_2}{\nu(m_3 + m_1)}} \left[(m_3 + m_1)\, s_c^1 + m_1\, s_c^2\right] = \sqrt{\dfrac{m_2}{\nu(m_3 + m_1)}}\, (m_3 + m_1 + \rho_3\, m_1)\, s_c^1 . \end{cases}$$

ce qui donne

$$(V.10,4) \begin{cases} v_c^3 = -\sqrt{\dfrac{m_2}{\nu\, m_3\, m_1}} \quad \dfrac{(m_3 + m_1 + \rho_3\, m_1)}{\rho_3} \cdot v_c^1 , \text{ et} \\ \dfrac{1}{(v_c^1)^2} = 1 + \dfrac{m_2}{\nu\, m_3\, m_1} \quad \dfrac{(m_3 + m_1 + m_1\, \rho_3)^2}{\rho_3^2} . \end{cases}$$

on remarque qu'au voisinage du point c, $v^1 = -\sqrt{1 - (v^2)^2 - (v^3)^2}$, $v^3 > 0$,

ρ_3 étant supérieur à 1 pour $m_1 > m_2 > m_3$.

Les coordonnées de y_c s'écrivent

$$y_c = \sqrt{-2h}\ (0,\ m_1\ \sigma_c^1\ ,\ 0\ ,\ m^2\ \sigma_c^3\ ,\ 0\ ,\ m^3\ \sigma_c^5\ )\ ,$$

où, en tenant compte de (VI.2,13) et de (V.8,2) ,

$$(V.10,5)\qquad \begin{cases} y_{c,1} = 0 \quad , \quad y_{c,2} = \sqrt{-2h}\left(\dfrac{v_c^1}{\beta} - \dfrac{\gamma}{\delta\beta}\ v_c^3\right) \quad , \quad y_{c,3} = 0\ , \\ y_{c,4} = \sqrt{-2h}\ \dfrac{v_c^3}{\delta} \quad , \quad y_{c,5} = 0\ , \quad y_{c,6} = -\sqrt{-2h}\left[\dfrac{v_c^1}{\beta} + \dfrac{1}{\delta}\left(1 - \dfrac{\gamma}{\beta}\right) v_c^3\right]\ . \end{cases}$$

Développons la fonction g au voisinage de $(v_c,\ y_c) = (v_c^2,\ v_c^3,\ y_{c,1}\ ,\ldots,y_{c,4})$.

1) Développement de $U(v^2,\ v^3)$ au voisinage de $v_c = (0,\ v_c^3)$

D'après (IV.2,14) et (V.8,2) , on peut écrire au voisinage du point c

$$(V.10,6)\qquad \begin{cases} s^1 = \gamma v^1 + \delta v^3 = -\gamma\sqrt{1 - (v^2)^2 - (v^3)^2} + \delta v^3 \quad , \\ s^2 = \sqrt{\beta^2 (v^1)^2 + \alpha^2 (v^2)^2} = \sqrt{\beta^2 - (\beta^2 - \alpha^2)(v^2)^2 - \beta^2 (v^3)^2}\ , \end{cases}$$

ce qui donne

$$\left[\frac{\partial s^1}{\partial v^2}\right]_c = 0 \quad , \quad \left[\frac{\partial s^2}{\partial v^2}\right]_c = 0 \quad , \quad \left[\frac{\partial s^1}{\partial v^3}\right]_c = \delta - \gamma\,\frac{v_c^3}{v_c^1} = \frac{m_2 + (m_2 + m_3)\ \rho_3}{\delta\ m_2\ m_3\ \rho_3} \quad ,$$

$$\left[\frac{\partial s^2}{\partial v^3}\right]_c = -\beta^2\,\frac{v_c^3}{s_c^2} = \frac{-(m_3 + m_1 + \rho_3\ m_1)}{\delta\ m_3\ m_1\ \rho_3} \quad ,$$

$$\left[\frac{\partial^2 s^1}{\partial (v^2)^2}\right]_c = \frac{-\gamma}{v_c^1} \ , \ \left[\frac{\partial^2 s^1}{\partial (v^3)^2}\right]_c = \frac{-\gamma}{(v_c^1)^3} \ , \ \left[\frac{\partial^2 s^1}{\partial v^2 \partial v^3}\right]_c = 0 \quad ,$$

$$\left[\frac{\partial^2 s^2}{\partial (v^2)^2}\right]_c = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{s_c^2} \quad , \quad \left[\frac{\partial^2 s^2}{\partial v^2\ v^3}\right]_c = 0 \ , \ \left[\frac{\partial^2 s^2}{\partial (v^3)^2}\right]_c = \frac{\beta}{(v_c^1)^3}$$

D'autre part, les dérivées partielles premières et secondes de U par rapport à s^1 et s^2 calculées dans (V.8), permettent d'écrire

$$\left[\frac{\partial U}{\partial s^1}\right]_c = \frac{m_2\, m_3}{(s_c^1)^2}\left[\frac{1}{(1+\rho_3)^3} - 1\right], \quad \left[\frac{\partial U}{\partial s^2}\right]_c = \frac{m_3\, m_1}{(s_c^1)^2}\left[\frac{\rho_3}{(1+\rho_3)^3} - \frac{1}{(\rho_3)^2}\right],$$

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial (s^1)^2}\right]_c = \frac{m_2\, m_3}{(s_c^1)^3}\left[\frac{1}{(1+\rho_3)^3} + \frac{3m_3}{m_1}\,\frac{1}{(1+\rho_3)^5} + 2\right], \left[\frac{\partial^2 U}{\partial s^1 \partial s^2}\right]_c = \frac{3(m_3)^2\,\rho_3}{(s_c^1)^3\,(1+\rho_3)^5}$$

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial (s^2)^2}\right]_c = \frac{m_3\, m_1}{(s_c^1)^3}\left[\frac{1}{(1+\rho_3)^3} + \frac{3m_3}{m_2}\,\frac{\rho_3^2}{(1+\rho_3)^5} + \frac{2}{\rho_3^2}\right], \text{ d'où les résultats suivants :}$$

$$\left[\frac{\partial U}{\partial v^2}\right]_c = v_c^2\left[-\frac{\gamma}{v^1}\,\frac{\partial U}{\partial s^1} + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{s^2}\,\frac{\partial U}{\partial s^2}\right]_c = 0 ,$$

$$\left[\frac{\partial U}{\partial v^3}\right]_c = \frac{1}{\delta\rho_3 (s_c^1)^2}\left\{\left[m_2 + (m_2 + m_3)\,\rho_3\right]\left[\frac{1}{(1+\rho_3)^3} - 1\right] - (m_3 + m_1 + m_1\,\rho_3)\left[\frac{\rho_3}{(1+\rho_3)^3} - \frac{1}{\rho_3^2}\right]\right\},$$

$$\text{où } \left[\frac{\partial U}{\partial v^3}\right]_c = \frac{-1}{\delta\rho_3^3 (1+\rho_3)^2 (s_c^1)^2} \cdot f_3(\rho_3) = 0 ,$$

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial (v^2)^2}\right]_c = \frac{m_2}{s_c^2 (s_c^1)^2 \rho_3^2 (1+\rho_3)^3} \cdot \left\{\rho_3^2\left[1 - (1+\rho_3)^3\right] - \frac{m_1}{m_2 + m_3}\left[\rho_3^3 - (1+\rho_3)^3\right]\right\},$$

ou, en utilisant (V.10,2) ,

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial (v^2)^2}\right]_c = \frac{-\, m_2\, m_3}{s_c^2 (s_c^1)^2 \rho_3^2 (1+\rho_3)^3 (m_2 + m_3)}\left[(1+\rho_3^2)(1+\rho_3)^2 - \rho_3^2\right] = -K^2 < 0 ,$$

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial v^2 \partial v^3}\right]_c = 0 ,$$

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial (v^3)^2}\right]_c = \frac{\left[m_2 + (m_2 + m_3)\,\rho_3\right]^2}{\delta^2 m_2 m_3 \rho_3^2 (s_c^1)^3}\left[\frac{1}{(1+\rho_3)^3} + \frac{3m_3}{m_1}\,\frac{1}{(1+\rho_3)^5} + 2\right] +$$

$$- \frac{6(m_3+ m_1+ \rho_3 m_1)}{\delta^2 m_1 m_2 \rho_3^2 (s_c^1)^3} \left[m_2 + (m_2+ m_3) \rho_3\right] \frac{\rho_3}{(1 + \rho_3)^5} +$$

$$+ \frac{(m_3+ m_1+ \rho_3 m_1)^2}{\delta^2 m_3 m_1 \rho^2 (s_c^1)^3} \left[\frac{1}{(1 + \rho_3)^3} + \frac{3m_3}{m_2} \frac{\rho_3^2}{(1 + \rho_3)^5} + \frac{2}{\rho_3^3}\right] +$$

$$- \frac{\gamma m_2 m_3}{(v_c^1)^3 (s_c^1)^2} \left[\frac{1}{(1 + \rho_3)^3} - 1\right] + \frac{\beta m_3 m_1}{(v_c^1)^3 (s_c^1)^2} \left[\frac{\rho_3}{(1 + \rho_3)^3} - \frac{1}{\rho_3^2}\right]$$

Dans l'expression de $\left[\frac{\partial^2 U}{\partial (v^3)^2}\right]_c$, soient Q la somme des deux derniers termes et P la somme des deux premiers termes. On a

$$Q = \frac{1}{(v_c^1)^2} \frac{m_2 \rho_3^2 \left[1 - (1 + \rho_3)^3\right] - (m_3+ m_1)\left[\rho_3^3 - (1 + \rho_3)^3\right]}{\rho_3^3 (1 + \rho_3)^3 (s_c^1)^3}$$, ou, d'après (V.10,2),

$$Q = \frac{m_3\left[(1 + \rho_3^2)(1 + \rho_3)^2 - \rho_3^2\right]}{(v_c^1)^2 (s_c^1)^3 \rho_3^2 (1 + \rho_3)^3} > 0 \quad ;$$

$$P = \frac{\left[m_2+ (m_2+ m_3) \rho_3\right]}{\delta^2 m_1 m_2 m_3 \rho_3^2 (s_c^1)^3 (1+\rho_3)^5} \cdot \left\{\left[m_2+(m_2+m_3)\rho_3\right]\left[m_1(1+\rho_3)^2+3m_3+2m_1(1+\rho_3)^5\right] - 6 m_3\rho_3\left[m_3+m_1(1+\rho_3)\right]\right\}$$

---

ce qui montre que P est positif pour $\rho_3 \geqslant 1$, $m_1 \geqslant m_2 \geqslant m_3$,

donc $\left[\frac{\partial 2U}{\partial (v^3)^2}\right]_c = H^2 > 0$.

Il en résulte que

$$U(v^2,v^3) = \omega\sqrt{-2h} - \frac{K^2}{2}(v^2)^2 + \frac{H^2}{2}(v^3-v_c^3)^2 + O(|v-v_c|^3) \quad .$$

2) Développement de $\frac{\|y\|^2 - 2h}{D}$ au voisinage de (v_c, y_c) :

Un calcul analogue à celui effectué dans (V.8), permet de trouver le développement de $\frac{\|y\|^2 - 2h}{D}$ au voisinage de (v_c, y_c), il suffit de remplacer v_a et y_a par v_c et y_c respectivement.

Le développement de g au voisinage de (v_c, y_c) s'écrit alors, au troisième ordre près,

$$g = \frac{K^2}{\omega}(z_1)^2 - \frac{H^2}{\omega}(z_2)^2 + \frac{1}{\sqrt{-2h}}\left[(z_3)^2 + (z_4)^2 + z_5)^2 + (z_6)^2\right]$$

où

$$z_1 = v^2 \quad , \quad z_2 = v^3 - v_c^3 \quad , \quad z_3 = \alpha\, y_1 + \sqrt{-2h}\; v^2 \quad ,$$

$$z_4 = \beta(y_2 - y_{c,2}) + \gamma\,(y_4 - y_{c,4}) + \sqrt{-2h}\;\frac{v_c^3}{v_c^1}\,(v^3 - v_c^3) \quad ,$$

$$z_5 = \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}\; y_3 + \frac{\beta\gamma y_1}{\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}} \quad , \quad z_6 = \delta\,(y_4 - y_{c,4}) - \sqrt{-2h}\,(v^3 - v_c^3) \quad .$$

Il en résulte que (v_c, y_c) est un point critique non dégénéré d'indice 1 pour la fonction g ; et l'espace E_c , où

$$M^6(h,\omega) \cong S^1 \times \left[(S^5 - S^3) \cup E_c\right] ,$$

est difféomorphe au voisinage du point (v_c, y_c) à un cône à deux nappes ayant pour sommet ce point.

(V.11) PROPOSITION :

Si $V^2(d) = -2h\omega^2$ alors l'espace E_d , où $M^6(h,\omega) \cong S^1 \times E_d$, possède deux points critiques non dégénérés d'indice 2 .

Preuve : Adoptons les notations de (V.8). Les coordonnées (s_d^1), s_d^2 , $s_d^3)$ du point $d \in \nabla'$ sont telles que

$$s_d^1 = s_d^2 = s_d^3 = \left(\frac{\nu}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} = s_d \quad , \quad \text{où} \quad \lambda = m_1 m_2 + m_3 m_1 + m_2 m_3 \quad ,$$

$V^2(d) = \frac{\lambda^3}{\nu}$, d'où, en particulier, $\cos \varphi_o = \frac{1}{2}$, $\sin \varphi_o = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

et les coordonnées des deux points d_1 et d_2 de Σ^2 sont d'après (IV.2,15)

$$(V.11,1)\quad \begin{cases} v_d^1 = \sqrt{\frac{m_3\, m_1}{m_3 + m_1}} \cdot \frac{s_d}{2} = \frac{s_d}{2\beta} \quad , \\ v_d^2 = \varepsilon \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{m_1 (m_3 + m_1)}{\nu}} \cdot s_d \quad , \varepsilon = \pm 1 \\ v_d^3 = \sqrt{\frac{m_2}{\nu (m_3 + m_1)}} \left(m_3 + \frac{m_1}{2}\right) \cdot s_d \quad . \end{cases}$$

Dans la suite v_d désignera l'un de ces deux points pour ε fixé, et u_d sera, pour la même valeur de ε, l'un des deux points y_{d_1} et y_{d_2} de R^6 définis dans (V.7) .

On a $y_d = \sqrt{-2h}\,(0,\ m_1 \sigma_d^1,\ 0\ ,\ m^2 \sigma_d^3,\ 0\ ,\ m_3 \sigma_d^5)$;

mais,en tenant compte de (IV.2,13) et de (V.8,2), les coordonnées de y_d s'écrivent

$$(V.11,2)\quad \begin{cases} y_{d,1} = \frac{-v_d^2}{\alpha}\sqrt{-2h}\ , \ y_{d,2} = \sqrt{-2h}\left(\frac{v_d^1}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta\beta} v_d^3\right), \ y_{d,3} = \frac{m_1\, m_2}{\nu} \alpha v_d^2 \sqrt{-2h}\ , \\ y_{d,4} = \sqrt{-2h} \cdot \frac{v_d^3}{\delta}\ , \ y_{d,5} = \frac{m_3\, m_1}{\nu} \cdot \alpha v_d^2 \sqrt{-2h}, \ y_{d,6} = -\sqrt{-2h}\left[\frac{v_d^1}{\beta} + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) v_d^3\right] \end{cases}$$

On va développer la fonction

$$g(v^2, v^3, y_1, y_2, y_3, y_4) = \frac{\|y\|^2 - 2h}{D} - \frac{2U(v^2, v^3)}{\omega} = 0 \ ,$$

au voisinage du point (v_d, y_d) .

1) Développement de $U(v^2, v^3)$ au voisinage de (v_d^2, v_d^3)

On a $\left[\frac{\partial U}{\partial s^1}\right]_d = m_2 m_3 \left[\frac{s^1}{(s^3)^2} - \frac{1}{(s^1)^2}\right]_d = 0$,

$$\left[\frac{\partial U}{\partial s^2}\right]_d = m_3\, m_1\left[\frac{s^2}{(s^3)^3} - \frac{1}{(s^2)^2}\right]_d = 0 \quad ,$$

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial s^1 \partial s^2}\right]_d = 3(m_3)^2 \left[\frac{s^1\, s^2}{(s^3)^5}\right]_d = \frac{3(m_3)^2}{(s_d)^3} \quad ,$$

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial (s^2)^2}\right]_d = m_3\, m_1\left[\frac{1}{(s^3)^3} + \frac{3m_3}{m_2}\,\frac{(s^2)^2}{(s^3)^5} + \frac{2}{(s^2)^3}\right]_d = \frac{3m_3\, m_1\,(m_2+ m_3)}{m_2 (s_d)^3}$$

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial (s^1)^2}\right]_d = m_2\, m_3\left[\frac{1}{(s^3)^3} + \frac{3m_3}{m_1}\,\frac{(s^1)^2}{(s^3)^5} + \frac{2}{(s^1)^3}\right]_d = \frac{3m_2\, m_3(m_3+ m_1)}{m_1 (s_d)^3} = \frac{1}{K^2} > 0 \quad .$$

Posons $\left[\dfrac{\partial^2 U}{\partial (s^1)^2}\cdot\dfrac{\partial^2 U}{\partial (s^2)^2} - \left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial s^1 \partial s^2}\right)^2\right]_d = \dfrac{H^2}{K^2} > 0$ car, au point d,

la fonction V(s) atteint son minimum absolu.

On a $\left[\dfrac{\partial^2 U}{\partial (v^2)^2}\right]_d = \left(\dfrac{\partial s^1}{\partial v^2}\right)_d^2 \left[\dfrac{\partial^2 U}{\partial (s^1)^2}\right]_d + 2\left(\dfrac{\partial s^1}{\partial v^2}\right)_d\left(\dfrac{\partial s^2}{\partial v^2}\right)_d \left[\dfrac{\partial^2 U}{\partial s^1 \partial s^2}\right]_d + \left(\dfrac{\partial s^2}{\partial v^2}\right)_d^2 \left[\dfrac{\partial^2 U}{\partial (s^2)^2}\right]_d$,

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial v^2 \partial v^3}\right]_d = \left[\left(\frac{\partial s^1}{\partial v^2}\right)\left(\frac{\partial s^1}{\partial v^3}\right)\frac{\partial^2 U}{\partial (s^1)^2} + \left(\frac{\partial s^1}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial s^2}{\partial v^3} + \frac{\partial s^2}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial s^1}{\partial v^3}\right)\frac{\partial^2 U}{\partial s^1\, \partial s^2} + \left(\frac{\partial s^2}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial s^2}{\partial v^3}\right)\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial (s^2)^2}\right]_d \quad ,$$

$$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial (v^3)^2}\right]_d = \left[\left(\frac{\partial s^1}{\partial v^3}\right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial (s^1)^2} + 2\left(\frac{\partial s^1}{\partial v^3}\cdot\frac{\partial s^2}{\partial v^3}\right)\frac{\partial^2 U}{\partial s^1 \partial s^2} + \left(\frac{\partial s^2}{\partial v^3}\right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial (s^2)^2}\right]_d \quad ,$$

où, d'après (IV.2,14) et (V.8,2) ;

$$\left(\frac{\partial s^1}{\partial v^2}\right)_d = -\frac{\gamma\, v_d^2}{v_d^1} \quad , \qquad \left(\frac{\partial s^1}{\partial v^3}\right)_d = \left(\delta - \frac{\gamma\, v_d^3}{v_d^1}\right) \quad ,$$

$$\left(\frac{\partial s^2}{\partial v^2}\right)_d = (\alpha^2 - \beta^2)\,\frac{v_d^2}{s_d} \quad , \qquad \left(\frac{\partial s^2}{\partial v^3}\right)_d = -\beta^2\,\frac{v_d^3}{s_d} \quad ,$$

avec

$$(V.11,3) \qquad \left[\frac{D(s^1,s^2)}{D(v^2,v^3)}\right]_d = \left[\gamma\alpha\,\frac{v_d^3}{v_d^1} + \delta\,(\alpha^2-\beta^2)\right]\,\frac{v_d^2.}{s_d.} > 0 \quad .$$

Le développement de $U(v^2,v^3)$ s'écrit alors au voisinage de (v_d^2, v_d^3)

$$U(v^2,v^3) = \omega\sqrt{-2h} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial(s^1)^2}\right]_d\left[\left(\frac{\partial s^1}{\partial v^2}\right)_d(v^2-v_d^2) + \left(\frac{\partial s^1}{\partial v^3}\right)_d(v^3-v_d^3)\right]^2 +$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 U}{\partial s^1 \partial s^2}\right]_d\left[\left(\frac{\partial s^1}{\partial v^2}\right)_d(v^2-v_d^2) + \left(\frac{\partial s^1}{\partial v^3}\right)_d(v^3-v_d^3)\right]\left[\left(\frac{\partial s^2}{\partial v^2}\right)_d(v^2-v_d^2) + \left(\frac{\partial s^2}{\partial v^3}\right)_d(v^3-v_d^3)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial(s^2)^2}\right]_d\left[\left(\frac{\partial s^2}{\partial v^2}\right)_d(v^2-v_d^2) + \left(\frac{\partial s^2}{\partial v^3}\right)_d(v^3-v_d^3)\right]^2 + O(|v-v_d|^3) \quad .$$

ou

$$U(v^2,v^3) = \omega\sqrt{-2h} + \frac{1}{2}K^2(z_1)^2 + \frac{1}{2}H^2(z_2)^2 + O(|v-v_d|^3) \qquad \text{avec}$$

$$(V.11,4) \quad \begin{cases} z_1 = \left\{\left[\frac{\partial^2 U}{\partial(s^1)^2}\right]_d\left(\frac{\partial s^1}{\partial v^2}\right)_d + \left[\frac{\partial^2 U}{\partial s^1\partial s^2}\right]_d\left(\frac{\partial s^2}{\partial v^2}\right)_d\right\}(v^2-v_d^2) + \\ \qquad + \left\{\left[\frac{\partial^2 U}{\partial(s^1)^2}\right]_d\left(\frac{\partial s^1}{\partial v^3}\right)_d + \left[\frac{\partial^2 U}{\partial s^1\partial s^2}\right]_d\left(\frac{\partial s^2}{\partial v^3}\right)_d\right\}(v^3-v_d^3) \quad , \\ z_2 = \left(\frac{\partial s^2}{\partial v^2}\right)_d(v^2-v_d^2) + \left(\frac{\partial s^2}{\partial v^3}\right)_d(v^3-v_d^3) \quad . \end{cases}$$

Ce changement de variables est régulier car de jacobien

$$\frac{D(z_1,z_2)}{D(v^1,v^3)} = \frac{1}{K^2}\cdot\left[\frac{D(s^1,s^2)}{D(v^2,v^3)}\right]_d > 0 \quad .$$

2) Développement de $\dfrac{\|y\|^2 - 2h\cdot}{D}$ au voisinage de (v_d, y_d)

On a d'après (V.8,4)

$$D = -\alpha v^2 y_1 + \beta v^1 y_2 + (\gamma v^1 + \delta v^3) y_4 \quad ,$$

d'où, en utilisant (V.11,1) et (V.11,2) ,

$$[D]_d = \sqrt{-2h} \ , \left[\frac{\partial (1/D)}{\partial v^2}\right]_d = \left\{\frac{+1}{D^2}\left[\alpha y_1 + \frac{v^2}{v^1}(\beta y_2 + \gamma y_4)\right]\right\}_d = 0 \quad ,$$

$$\left[\frac{\partial(1/D)}{\partial v^3}\right]_d = \left\{\frac{1}{D^2}\left[\frac{v^3}{v^1}(\beta y_2 + \gamma y_4) - \delta y_4\right]\right\}_d = 0 \quad ,$$

$$\left[\frac{\partial(1/D)}{\partial y_1}\right]_d = \left[\frac{\alpha v^2}{D^2}\right]_d = \frac{\alpha v_d^2}{-2h} \ , \left[\frac{\partial(1/D)}{\partial y_2}\right]_d = \left[\frac{-\beta v^1}{D^2}\right]_d = \frac{-\beta v_d^1}{-2h} \quad ,$$

$$\left[\frac{\partial(1/D)}{\partial y_4}\right]_d = \left[\frac{-(\gamma v^1 + \delta v^3)}{D^2}\right]_d = \frac{-(\gamma v^1 + \delta v^3)}{-2h} \quad ,$$

$$\left[\frac{\partial^2(1/D)}{\partial (v^2)^2}\right]_d = \left\{\frac{2}{D^3}\left[\alpha y_1 + \frac{v^2}{v^1}(\beta y_2 + \gamma y_4)\right]^2 + \frac{1}{D^2}\left[\frac{(\beta y_2 + \gamma y_4)}{v^1} + \frac{(v^2)^2}{(v^1)^3}(\beta y_2 + \gamma y_4)\right]\right\}_d = \frac{1}{\sqrt{-2h}}\left[1 + \left(\frac{v_d^2}{v_d^1}\right)^2\right] ,$$

$$\left[\frac{\partial^2(1/D)}{\partial v^2 \partial v^3}\right]_d = \left\{\frac{2}{D^3}\left[\alpha y_1 + \frac{v^2}{v^1}(\beta y_2 + \gamma y_4)\right]\left[\frac{v^3}{v^1}(\beta y_2 + \gamma y_4) - \delta y_4\right] + \frac{v^2 v^3 (\beta y_2 + \gamma y_4)}{D^2 (v^1)^3}\right\}_d = \frac{v_d^2 v_d^3}{\sqrt{-2h}(v_d^1)^2} ,$$

$$\left[\frac{\partial^2(1/D)}{\partial (v^3)^2}\right]_d = \left\{\frac{2}{D^3}\left[\frac{v^3}{v^1}(\beta y_2 + \gamma y_4) - \delta y_4\right]^2 + \frac{1}{D^2}\left[\left(\frac{1}{v^1} + \frac{(v^3)^2}{(v^1)^3}\right)(\beta y_2 + \gamma y_4)\right]_d = \frac{1}{\sqrt{-2h}}\left[1 + \left(\frac{v_d^3}{v_d^1}\right)^2\right]\right.$$

$$\left[\frac{\partial^2(1/D)}{\partial (y_1)^2}\right]_d = \left[\frac{2}{D^3}(\alpha v^2)^2\right]_d = \frac{2\alpha^2 (v_d^2)^2}{-2h\sqrt{-2h}} \ , \left[\frac{\partial^2(1/D)}{\partial y_1 \partial y_2}\right]_d = \left[\frac{-2}{D^3}\alpha\beta v^1 v^2\right]_d = \frac{-2\alpha\beta v_d^1 v_d^2}{-2h\sqrt{-2h}} \quad ,$$

$$\left[\frac{\partial^2(1/D)}{\partial y_1 \partial y_4}\right]_d = \left[\frac{-2}{D^3}(\gamma v^1 + \delta v^3)\alpha v^2\right]_d = \frac{-2\alpha v_d^2 (\gamma v_d^1 + \delta v_d^3)}{-2h\sqrt{-2h}}$$

$$\left[\frac{\partial^2(1/D)}{\partial y_1 \partial v^2}\right]_d = \left\{\frac{\alpha}{D^2} + \frac{2\alpha v^2}{D^3}\left[\alpha y_1 + \frac{v^2}{v^1}(\beta y_2 + \gamma y_4)\right]\right\}_d = \frac{\alpha}{-2h}$$

$$\left[\frac{\partial^2(1/D)}{\partial y_1 \partial v^3}\right]_d = \left[\frac{-2\alpha v^2}{D^3}\ \frac{\partial D}{\partial v^3}\right]_d = 0\ ,\quad \left[\frac{\partial^2(1/D)}{\partial (y_2)^2}\right]_d = \left[\frac{2}{D^3}\ (\beta v^1)^2\right]_d = \frac{2\beta^2 (v_d^1)^2}{-2h\ \sqrt{-2h}}$$

$$\left[\frac{\partial^2(1/D)}{\partial y_2 \partial y_4}\right]_d = \left[\frac{2\beta v^1}{D^3}\ (\gamma v^1 + \delta v^3)\right]_d = \frac{2\beta v_d^1 (\gamma v_d^1 + \delta v^3)}{-2h\ \sqrt{-2h}}\ ,$$

$$\left[\frac{\partial^2(1/D)}{\partial y_2 \partial v^2}\right]_d = \left\{\frac{\beta v^2}{D^2 v^1} - \frac{2}{D^3}\ \beta v^1 \left[\alpha y_1 + \frac{v^2}{v^1}\ (\beta y_2 + \gamma y_4)\right]\right\}_d = \frac{\beta v_d^2}{-2h\ v_d^1}\ ,$$

$$\left[\frac{\partial^2(1/D)}{\partial y_2 \partial v^3}\right]_d = \left\{\frac{\beta v^3}{D^2 v^1} - \frac{2\beta v^1}{D^3}\ \left[\frac{v^3}{v^1}\ (\beta y_2 + \gamma y_4) - \delta y_4\right]\right\}_d = \frac{\beta v_d^3}{-2h\ v_d^1}\ ,$$

$$\left[\frac{\partial^2(1/D)}{\partial (y_4)^2}\right]_d = \left[\frac{2}{D^3}\ (\gamma v^1 + \delta v^3)^2\right]_d = \frac{2\ (\gamma v_d^1 + \delta v_d^3)^2}{-2h\ \sqrt{-2h}}\ ,$$

$$\left[\frac{\partial^2(1/D)}{\partial y_4 \partial v^2}\right]_d = \left\{\frac{\gamma v^2}{D^2 v^1} - \frac{2}{D^3}\ (\gamma v^1 + \delta v^3)\left[\alpha y_1 + \frac{v^2}{v^1}\ (\beta y_2 + \gamma y_4)\right]\right\}_d = \frac{\gamma v_d^2}{-2h\ v_d^1}\ ,$$

$$\left[\frac{\partial^2(1/D)}{\partial y_4 \partial v^3}\right]_d = \left\{\frac{1}{D^2}\ \left(\frac{\gamma v^3}{v^1} - \delta\right) - \frac{2}{D^3}\ (\gamma v^1 + \delta v^3)\left[\frac{v^3}{v^1}\ (\beta y_2 + \gamma y_4) - \delta y_4\right]\right\}_d = \frac{1}{-2h}\left(\frac{\gamma v_d^3}{v_d^1} - \delta\right).$$

Ainsi on peut écrire

$$\frac{\sqrt{-2h}}{D} = 1 - \frac{1}{\sqrt{-2h}}\left[\beta v_d^1 (y_2 - y_{d,2}) + (\gamma v_d^1 + \delta v_d^3)(y_4 - y_{d,4}) - \alpha v_d^2 (y_1 - y_{d,1})\right] +$$

$$+ \frac{1}{-2h}\left[\beta v_d^1 (y_2 - y_{d,2}) + (\gamma v_d^1 + \delta v_d^3)(y_4 - y_{d,4}) - \alpha v_d^2 (y_1 - y_{d,1})\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{\left[1 + \left(\frac{v_d^3}{v_d^1}\right)^2\right](v^3 - v_d^3)^2 + \left[1 + \left(\frac{v_d^2}{v_d^1}\right)^2\right](v^2 - v_d^2)^2 + \frac{2\ v_d^2\ v_d^3}{(v_d^1)^2}\ (v^2 - v_d^2)(v^3 - v_d^3) +\right.$$

$$+ \frac{2\ \alpha}{\sqrt{-2h}}\ (y_1 - y_{d,1})(v^2 - v_d^2) + \frac{2\ \beta}{\sqrt{-2h}}\ \frac{v_d^2}{v_d^1}\ (y_2 - y_{d,2})(v^2 - v_d^2) +$$

$$+ \frac{2\beta}{\sqrt{-2h}} \frac{v_d^3}{v_d^1} (y_2 - y_{d,2})(v^3 - v_d^3) + \frac{2\gamma}{\sqrt{-2h}} \frac{v_d^2}{v_d^1} (y_4 - y_{d,4})(v^2 - v_d^2) +$$

$$+ \frac{2}{-2h} \left(\gamma \frac{v_d^3}{v_d^1} - \delta \right) (y_4 - y_{d,4})(v^3 - v_d^3) \Big\} + O(|v - v_d|^3) \quad .$$

cherchons le développement de $\|y\|^2$ au voisinage de y_d .

$$\|y\|^2 = \|y_d\|^2 + \frac{2}{m_1}(y_1 - y_{d,1})y_{d,1} + \frac{2}{m_1} y_{d,2}(y_2 - y_{d,2}) + \frac{2}{m_2} y_{d,3}(y_3 - y_{d,3}) +$$

$$+ \frac{2}{m_2} y_{d,4}(y_4 - y_{d,4}) + \frac{2}{m_3} (y_{d,1} + y_{d,3})(y_1 - y_{d,1} + y_3 - y_{d,3}) +$$

$$+ \frac{2}{m_3} (y_{d,2} + y_{d,4})(y_2 - y_{d,2} + y_4 - y_{d,4}) +$$

$$+ \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_3}\right)(y_1 - y_{d,1})^2 + \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_3}\right)(y_2 - y_{d,2})^2 + \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}\right)(y_3 - y_{d,3})^2 +$$

$$+ \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}\right)(y_4 - y_{d,4})^2 + \frac{2}{m_3}(y_1 - y_{d,1})(y_3 - y_{d,3}) + \frac{2}{m_3} (y_2 - y_{d,2})(y_4 - y_{d,4}) \quad .$$

Mais (V.11,2) donne

$$\frac{1}{m_1} y_{d,1} + \frac{1}{m_3} (y_{d,1} + y_{d,3}) = \sqrt{-2h} \quad (-\alpha v_d^2) \quad ,$$

$$\frac{1}{m_1} y_{d,2} + \frac{1}{m_3} (y_{d,2} + y_{d,4}) = \sqrt{-2h}\, \beta\, v_d^1 \quad ,$$

$$\frac{1}{m_3} y_{d,3} + \frac{1}{m_3} (y_{d,1} + y_{d,3}) = 0 \quad ,$$

$$\frac{1}{m_2} y_{d,4} + \frac{2}{m_3} (y_{d,2} + y_{d,4}) = \sqrt{-2h} \quad (\gamma v_d^1 + \delta v_d^3) \quad ,$$

d'où

$$\|y\|^2 = -2h + 2\sqrt{-2h}\left[\beta v_d^1(y_2 - y_{d,2}) + (\gamma v_d^1 + \delta v_d^3)(y_4 - y_{d,4}) - \alpha v_d^2(y_1 - y_{d,1})\right] +$$

$$+ \left[\beta(y_1 - y_{d,1}) + \gamma(y_3 - y_{d,3})\right]^2 + \delta^2(y_3 - y_{d,3})^2 +$$

$$+ \left[\beta(y_2 - y_{d,2}) + \gamma(y_4 - y_{d,4})\right]^2 + \delta^2(y_4 - y_{d,4})^2 \quad ;$$

cel entraîne

$$\frac{\|y\|^2 - 2h}{D} = 2\sqrt{-2h} + \frac{1}{\sqrt{-2h}}\left\{\left[\beta(y_1 - y_{d,1}) + \gamma(y_3 - y_{d,3})\right]^2 + \delta^2(y_3 - y_{d,3})^2 +\right.$$

$$\left. + \left[\beta(y_2 - y_{d,2}) + \gamma(y_4 - y_{d,4})\right]^2 + \delta^2(y_4 - y_{d,4})^2\right\} +$$

$$+ \sqrt{-2h}\left\{\left[1 + \left(\frac{v_d^3}{v_d^1}\right)^2\right](v^3 - v_d^3)^2 + \left[1 + \left(\frac{v_d^2}{v_d^1}\right)^2\right](v^2 - v_d^2)^2 + \frac{2v_d^2 v_d^3 (v^2 - v_d^2)(v^3 - v_d^3)}{(v_d^1)^2} +\right.$$

$$+ \frac{2\alpha}{\sqrt{-2h}}(y_1 - y_{d,1})(v^2 - v_d^2) + \frac{2\beta}{\sqrt{-2h}}\frac{v_d^2}{v_d^1}(y_2 - y_{d,2})(v^2 - v_d^2) + \frac{2\beta}{\sqrt{-2h}}\frac{v_d^3}{v_d^1}(y_2 - y_{d,2})(v^3 - v_d^3) +$$

$$\left. + \frac{2\gamma}{\sqrt{-2h}}\cdot\frac{v_d^2}{v_d^1}(y_4 - y_{d,4})(v^2 - v_d^2) + \frac{2}{\sqrt{-2h}}\left(\gamma\frac{v_d^3}{v_d^1} - \delta\right)(y_4 - y_{d,4})(v^3 - v_d^3)\right\} + O(1\ 1^3),$$

ou

$$\frac{\|y\|^2 - 2h}{D} = 2\sqrt{-2h} + \frac{1}{\sqrt{-2h}}\left[\beta(y_2 - y_{d,2}) + \gamma(y_4 - y_{d,4}) + \sqrt{-2h}\,\frac{v_d^2}{v_d^1}(v^2 - v_d^2) + \sqrt{-2h}\,\frac{v_d^3}{v_d^1}(v^3 - v_d^3)\right]^2 +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{-2h}}\left[\delta(y_4 - y_{d,4}) - \sqrt{-2h}\,(v^3 - v_d^3)\right]^2 + \frac{1}{\sqrt{-2h}}\left[\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}(y_3 - y_{d,3}) + \frac{\beta\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}}(y_1 - y_{d,1})\right]^2 +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{-2h}}\left[\alpha(y_1 - y_{d,1}) + \sqrt{-2h}(v^2 - v_d^2)\right]^2 + \qquad O(|\ |^3).$$

Finalement, le développement de g au voisinage de (v_d, y_d) s'écrit, au troisième ordre près,

$$g = -\frac{K^2}{\omega}(z_1)^2 - \frac{H^2}{\omega}(z_2)^2 + \frac{1}{\sqrt{-2h}}\left[(z_3)^2 + (z_4)^2 + (z_5)^2 + (z_6)^2\right],$$

où $z_3 = \alpha(y_1 - y_{d,1}) + \sqrt{-2h}\,(v^2 - v_d^2)$,

$$z_4 = \beta(y_2 - y_{d,2}) + \gamma(_4 - y_{d,4}) + \sqrt{-2h}\,\frac{v_d^2}{v_d^1}\,(v^2 - v_d^2) + \sqrt{-2h}\,\frac{v_d^3}{v_d^1}\,(v^3 - v_d^3)\ ,$$

$$z_5 = \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}\,(y_3 - y_{d,3}) + \frac{\beta\,\gamma}{\sqrt{\gamma^2+\delta^2}}\,(y_1 - y_{d,1})\ ,$$

$$z_6 = \delta(y_4 - y_{d,4}) - \sqrt{-2h}\,(v^3 - v_d^3)\ ,$$

z_1 et z_2 sont donnés par (V, 11, 4).

Ce changement de variables est régulier car de Jacobien

$$\frac{D(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)}{D(v^2, v^3, y_1, y_2, y_3, y_4)} = \beta^2\,\delta^2 . \frac{D(z_1, z_2)}{D(v^2, v^3)} \neq 0.$$

Cela montre que la fonction g possède un point critique non dégéné d'indice 2.

L'espace E_d , où $M^6(h,\omega) \simeq S^1 \times E_d$, présente deux points critiques d'indice 2 pour la fonction g.

(V.12) PROPOSITION :

1) Si $V^2(a) = V^2(a) = V^2(b) = -2h\,\omega^2 < V^2(c)$ alors l'espace E_{ab} , où $M^6(h,\omega) \simeq E_{ab}$ présente deux points critiques non dégénérés d'indice 1 ;

2) Si $V^2(a)\quad V^2(b) = V^2(c) = -2h\,\omega^2$ alors l'espace E_{bc} , où $M^6(h,\omega) \simeq S^1 \times E_{ac}$, présente deux points critiques non dégénérés d'indice 1.

3) Si $V^2(a) = V^2(b) = V^2(c) = -2h\,\omega^2$ alors l'espace E_{abc} , où $M^6(h,\omega) \simeq S^1 \times E_{abc}$, présente trois points critiques non dégénérés d'indice 1.

Preuve : D'après (V.8), (V,9) et (V,10), la fonction $g(v^2, v^3, y_1, y_2, y_3, y_4)$ possède dans E_{ab} deux points critiques non dégénérés d'indice 1 (v_a, y_a) et (v_b, y_b), dans E_{bc} deux points critiques non dégénérés d'indice 1 (v_b, y_b) et (v_c, y_c), et dans E_{abc} elle possède trois points critiques non dégénérés d'indice 1 :

$$(v_a, y_a),\ (v_b, y_b) \text{ et } (v_c, y_c)\ .$$

CHAPITRE VI.

PREMIER GROUPE D'HOMOTOPIE DE $M^6(h,\omega)$

Nous allons chercher dans ce chapitre le premier groupe d'homotopie de la sous-variété $M^6(h, \omega)$ dans les différents cas étudiés dans IV et V.

Le premier groupe d'homotopie d'un espace E connexe par arcs sera désigné par $\pi_1(E)$.

On notera $(G_1 * G_2)$ le produit libre du groupe libre G_1 par le groupe libre G_2.

Z sera le groupe libre à un générateur, Z_n le groupe libre à n générateurs et $(Z \times Z_n)$ le produit (direct) de Z par Z_n.

F désignera l'espace $(S^5 - S^3) \simeq S^1 \times R^4$. (Voir IV.9).

L'isomorphisme de groupes se notera $\approx$.

(VI.1) PROPOSITION :

Le premier groupe d'homotopie de $M^6(h, 0)$ est le produit de Z par un groupe libre à deux générateurs.

Preuve : En effet si $h \geqslant 0$, $\omega = 0$ on a, d'après (IV 3),

$$M^6(h, 0) \simeq (S^1 \times \Sigma^2 \times R \times S^2),$$

or $\pi_1(S^1) \approx Z$, $\pi_1(\Sigma^2) \approx \pi_1(R^2 - 2 \text{ points}) \simeq Z_2$,

$\pi_1(R) \approx \{1\}$, et $\pi_1(S^2) \approx \{1\}$,

d'où $\pi_1 [M^6(h, 0)] \approx Z \times Z_2$ si $h \geqslant 0$.

De même, si $h < 0$, $\omega = 0$ alors $M^6(h, 0) \simeq (S^1 \times \Sigma^2 \times R^3)$, d'après (IV.3),

d'où $\pi_1 M^6(h, 0) \simeq Z \times Z_2$.

(VI.2) PROPOSITION :

Si $h \geq 0$ et $\omega \neq 0$ alors $\pi_1 [M^6(h,\omega)] \approx Z \times Z_2$.

Preuve : D'après (IV.4), $M^6(h,\omega) \simeq S^1 \times \Sigma^2 \times R^3$,

d'où $\pi_1[M^6(h,\omega)] \approx Z \times Z_2$.

(VI.3) PROPOSITION :

Si $h < 0$, $\omega \neq 0$ et $V^2(d) + 2h\omega^2 > 0$

alors $\pi_1[M^6(h,\omega)] \approx Z \times Z_2$.

Preuve : En effet, $\pi_1(S^3) \approx \{1\}$ et $M^6(h,\omega) \simeq S^1 \times \Sigma^2 \times S^3$, d'après (IV.6), d'où le résultat.

(VI.4) PROPOSITION :

Si $V^2(c) < -2h\omega^2$, alors $M^6(h,\omega)$ est difféomorphe à trois copies disjointes d'un espace dont le premier groupe d'homotopie est le groupe abélien Z^2 à deux générateurs.

Preuve : En effet, d'après (IV.9), $M^6(h,\omega) \simeq 3(S^1 \times S^1 \times R^4)$,

où $\pi_1[S^1 \times S^1 \times R^4] \approx Z \times Z = Z^2$.

(VI.5) PROPOSITION :

Si $V^2(b) < -2h\omega^2 < V^2(c)$ alors $M^6(h,\omega)$ est la réunion disjointe de deux espaces dont les premiers groupes d'homotopies sont Z^2 et $(Z \times Z_2)$.

Preuve : D'après (IV.10) $M^6(h,\omega)$ est la réunion disjointe des deux espaces

$$S^1 \times S^1 \times R^4 \quad \text{et} \quad S^1 \times (S^5 - S5^3),$$

d'où $\pi_1(S^1 \times S^1 \times R^4) \approx Z^2$ et $\pi_1[S^1 \times (S^5 - S5^3)] \simeq Z \times \pi_1[(S^5 - S5^3)]$.

Calculons $\pi_1[(S^5 - S^3)]$.

On sait (voir début du chapitre V) que

$$(S^5 - 2S^3) \simeq [(D^2 - 2 \text{ points}) \times S^3] \cup (S^1 \times D^4)$$

avec $$[(D^2 - 2 \text{ points}) \times S^3] \cap (S^1 \times D^4) = \partial D^2 \times \partial D^4 \simeq S^1 \times S^3.$$

D'autre part $$\pi_1[(D^2 - 2 \text{ points}) \times S^3] \approx \pi_1[(D^2 - 2 \text{ points})] \approx Z_2 ,$$

$$\pi_1[(S^1 \times D^4)] \approx Z, \qquad \pi_1[(S^1 \times S^3)] \simeq Z ,$$

donc l'homomorphisme

$$\pi_1[(S^1 \times S^3)] \longmapsto \pi_1[(S^1 \times D^4)]$$

induit par l'inclusion de $(S^1 \times S^3)$ dans $(S^1 \times D^4)$, est un isomorphisme. Il en résulte, d'après le théorème de Van Kampen, que l'homomorphisme

$$\pi_1[(D^2 - 2 \text{ points}) \times S^3] \longmapsto \pi_1\{[(D^2 - 2 \text{ points}) \times S^3] \cup (S^1 \times D^4)\}$$

induit par l'inclusion est un isomorphisme. Nous avons ainsi

$$\pi_1[(S^5 - 2S^3)] \approx Z^2$$

et

$$\pi_1 S^1 \times [(S^5 - 2S^3)] \approx Z \times Z_2$$

c.q.f.d.

(VI.6) PROPOSITION :

Si $V^2(a) < -2h\omega^2 < V^2(b)$

alors $$\pi_1[M^6(h,\omega)] \approx Z \times Z_3$$

Preuve : On a $\pi_1[M^6(h,\omega)] \approx Z \times \pi_1(S^5 - 3S^3)$, puisque $M^6(h,\omega) \simeq S^1 \times (S^5 - 3S^3)$ d'après (IV.11). D'autre part on sait (voir début du chapitre V) que

$$(S^5 - 3S^3) \simeq [(D^2 - 3 \text{ points}) \times S^3] \cup (S^1 \times D^4),$$

avec $$[(D^2 - 3 \text{ points}) \times S^3] \cap (S^1 \times D^4) = (\partial D^2 \times \partial D^4) \simeq S^1 \times S^3 ,$$

où $$\pi_1[(D^2 - 3 \text{ points}) \times S^3] \approx \pi_1[(D^2 - 3 \text{ points})] \approx Z_3 ,$$

$$\pi_1[(S^1 \times D^4)] \approx Z , \qquad \pi_1[(S^1 \times S^3)] \approx Z.$$

On en déduit que l'homomorphisme

$$\pi_1[(S^1 \times S^3)] \longrightarrow \pi_1[(S^1 \times D^4)]$$

induit par l'inclusion de $(S^1 \times S^3)$ dans $(S^1 \times D^4)$, est un isomorphisme. Le théorème de Van Kampen entraîne alors que l'homomorphisme

$$\pi_1[(D^2 - 3 \text{ points}) \times S^3] \longrightarrow \pi_1\{[(D^2 - 3 \text{ points}) \times S^3] \cup (S^1 \times D^4)\}$$

induit par l'inclusion, est un isomorphisme

Donc $\pi_1[(S^5 - 3S^3)] \approx Z_3$ et $\pi_1[M^6(h,\omega)] \approx Z \times Z_3$.

(VI.7) PROPOSITION :

Si $V^2(d) < -2h\,\omega^2 < V^2(a)$

alors $\pi_1[M^6(h,\omega)] \approx Z \times Z_4$

Preuve : D'après la preuve de (IV.12), $M^6(h,\omega) \simeq S^1 \times E$, où E est l'espace obtenu à partir de la réunion des deux espaces

$$E_1 = [D_1^2 - (D^2 - \partial D^2) - 3 \text{ points}] \times S^3 \ , \ E_2 = 2(S^1 \times D^4)$$

par identification des deux composantes connexes de la frontière de E_2 respectivement aux deux composantes connexes

$$(\partial D_1^2 \times S^3) \quad \text{et} \quad (\partial D^2 \times S^3),$$

de la frontière de E_1 .

Effectuons cette identification en deux étapes, en appliquant le théorème de Van Kampen.

1) Prenons $E_1 \cup (S^1 \times D^4)$ avec $(\partial D_1^2 \times S^3) = E_1 \cap (S^1 \times D^4) \simeq S^1 \times S^3$.

L'homomorphisme :

$$\pi_1[(\partial D_1^2 \times S^3)] \longrightarrow \pi_1(S^1 \times D^4)$$

induit par l'inclusion de $(\partial D_1^2 \times S^3)$ dans $(S^1 \times D^4)$ est un isomorphisme :

$$\pi_1[(\partial D_1^2 \times S^3)] \approx \pi_1[(S^1 \times D^4)] \approx Z \ ;$$

donc, d'après le théorème de Van Kampen, l'homomorphisme

$$\pi_1(E_1) \longrightarrow \pi_1[E_1 \cup (S^1 \times D^4)]$$

induit par l'inclusion est aussi un isomorphisme :

$$\pi_1[E_1 \cup (S^1 \times D^4)] \approx \pi_1(E_1).$$

2) Soit $E' = E_1 \cup (S^1 \times D^4)$, avec $(\partial D_1^2 \times S^3) = E_1 \cap (S^1 \times D^4)$

on a $E = E' \cup (S^1 \times D^4)$, avec $(\partial D^2 \times S^3) = E' \cap (S^1 \times D^4) \simeq S^1 \times S^3$.

Le théorème de Van Kampen permet d'affirmer que

$$\pi_1(E) \approx \pi_1(E') ,$$

puisque $\pi_1[(\partial D^2 \times S^3)] \approx \pi_1[(S^1 \times D^4)] \approx Z.$

Donc $\pi_1(E) \approx \pi_1(E_1).$

Or, $\pi_1(E_1) \approx \pi_1[D_1^2 - (D^2 - \partial D^2) - 3\text{points}] \approx \pi_1(D_1^2 - 4 \text{ points}) \approx Z_4$,

donc $\pi_1(E) \approx Z_4$ et $\pi_1[M^6(h,\omega)] \approx Z \times Z_4$.

(VI.8) PROPOSITION :

Si $V^2(a) = -2h\,\omega^2 < V^2(b)$

alors $\pi_1[M^6(h,\omega)] \approx Z \times Z_4$.

Preuve : D'après (V.1), $M^6(h,\omega) \simeq S^1 \times E_a$, où E_a s'obtient à partir de $(S^5 - 3S^3)$ en identifiant deux points de S^5.

Or, $\pi_1(S^5) \approx \{1\}$, donc $\pi_1(S'^5) \approx Z$, S'^5 étant l'espace S^5 dans lequel deux points sont identifiés.

D'autre part $\pi_1(S^5 - 3S^3) \approx Z_3$, d'après (VI,6), donc

$$\pi_1(E_a) \approx Z * Z_3 = Z_4 \quad \text{et} \quad \pi_1[M^6(h,\omega)] \approx Z \times Z_4 .$$

(VI.9) PROPOSITION :

Si $V^2(a) < V^2(b) = -2h\,\omega^2 < V^2(c)$

alors $\pi_1[M^6(h,\omega)] \approx Z \times Z_3$

Preuve : D'après (V.2), $M^6(h,\omega) \simeq S^1 \times E_b$, où E_b est la réunion des deux espaces $(S^5 - 2S^3)$ et $F = S^5 - S^3$ ayant un point commun unique. On peut donc décomposer E_b en la réunion de deux sous-espaces qui se rétractent par déformation sur F et $(S^5 - 2S^3)$ respectivement, et dont l'intersection se rétracte par déformation sur le point (b'', y_b). Le théorème de Van Kampen entraîne alors (théorème 3.1, page 122 de [6]) que $\pi_1(E_b)$ est le produit libre de $\pi_1(F)$ et de $\pi_1(S^5 - 2S^3)$. Or, d'après (VI.5)

$$\pi_1(F) \approx Z \qquad \text{et} \qquad \pi_1(S^5 - 2S^3) \approx Z_2 ,$$

donc $$\pi_1(E_b) \approx Z_3 \qquad \text{et} \qquad \pi_1[M^6(h,\omega)] \approx Z \times Z_3 .$$

(VI.10) PROPOSITION :

Si $V^2(a) \leqslant V^2(b) < V^2(c) = -2h\,\omega^2$ alors $M^6(h,\omega)$ est la réunion de deux espaces disjoints dont les premiers groupes d'homotopie sont respectivement Z^2 et $Z \times Z_2$.

Preuve : En effet, d'après (V.4), $M^6(h,\omega) \simeq S^1 \times [F \cup E]$, où E est la réunion de deux copies de $F = S^5 - S^3$ ayant un point commun.

On a $\pi_1(F) \approx \pi_1(S^1 \times R^4) \approx Z$, d'où $\pi_1(S^1 \times F) \approx Z^2$.

On peut considérer E comme la réunion de deux sous-espaces qui se rétractent par déformation sur deux copies respectives de F, et dont l'intersection se rétracte par déformation sur le point commun.

Il résulte du théorème de Van Kampen que

$$\pi_1(E) \approx Z \star Z = Z_2 \qquad \text{et} \qquad \pi_1(S^1 \times E) \approx Z \times Z_2 .$$

(VI.11) PROPOSITION :

Si $V^2(a) = V^2(b) = -2h\,\omega^2 < V^2(c)$

alors $$\pi_1[M^6(h,\omega)] \approx Z \times Z_4 .$$

Preuve : On sait d'après (V.3) que $M^6(h,\omega) \simeq S^1 \times E_{ab}$, où E_{ab} est la réunion

des deux espaces $F = S^5 - S^3$ et $(S^5 - 2S^3)$ ayant deux points communs distincts.

On peut considérer E_{ab} comme la réunion de deux ouverts se rétractant par déformation sur F et $(S^5 - 2S^3)$ respectivement, et dont l'intersection comprend deux composantes connexes disjointes se rétractant par déformation sur les deux points communs respectifs. On en déduit, d'après une généralisation du théorème de Van Kampen (exercice 3.1. page 126, [6]) que

$$\pi_1(E_{ab}) \approx \pi_1(F) \star \pi_1[(S^5 - 2S^3)] \star Z \ ;$$

or, $\pi_1(F) \approx Z$ et $\pi_1[(S^5 - 2S^3)] \approx Z_2$, d'après (IV.5),

d'où $\pi_1(E_{ab}) \approx Z_4$ et $\pi_1[M^6(h,\omega)] \approx Z \times Z_4$

(VI.12) PROPOSITION :

Si $V^2(a) < V^2(b) = V^2(c) = -2h\,\omega^2$,

alors $\pi_1[M^6(h,\omega)] \approx Z \times Z_3$

Preuve : On sait, d'après (V.5), que $M^6(h,\omega) \simeq S^1 \times E_{bc}$, où E_{bc} est la réunion de trois copies de $F = S^5 - S^3$, l'une de ces copies touchant chacune deux autres en un point.

Soit F' l'espace formé par la réunion de deux copies de F se touchant en un point. Le théorème de Van Kampen entraîne

que $\pi_1(F') \approx \pi_1(F) \star \pi_1(F) \approx Z \star Z = Z_2$.

Une nouvelle application de ce théorème à l'espace $E_{bc} = F' \cup F$, avec $F' \cap F$ égal le second point, montre que

$$\pi_1(E_{bc}) \approx \pi_1(F') \star \pi_1(F') \approx \pi_1(F) \approx Z_3 \ ;$$

d'où

$$\pi_1[M^6(h,\omega)] \approx Z \times Z_3 \ .$$

(VI.13) PROPOSITION :

Si $V^2(a) = V^2(b) = V^2(c) = -2h\,\omega^2$

alors $\pi_1[M^6(h,\omega)] \approx Z \times Z_4$.

Preuve : On sait, d'après (V.6) que $M^6(h,\omega) \simeq S^1 \times E_{abc}$, où E_{abc} est la réunion de trois copies, de l'espace $F = S^5 - S^3$, se touchant deux à deux aux trois points (a', y_a), (b', y_b) et (c', y_c). Soit F' la réunion de deux copies de F se touchant au point (c', y_c).

On peut considérer E_{abc} comme la réunion de deux sous-espaces se retractant par déformation sur F et F' respectivement, et dont l'intersection comprend deux composantes connexes se rétractant par déformation sur les deux points respectifs (a', y_a) et (b', y_b). D'après une généralisation du théorème de Van Kampen, on peut écrire

$$\pi_1(E_{abc}) \approx \pi_1(F') \star \pi_1(F) \star Z$$

Or $\pi_1(F') \approx Z_2$ et $\pi_1(F) \approx Z$,

d'où $\pi_1(E_{abc}) \approx Z_4$ et $\pi_1[M^6(h,\omega)] \approx Z \times Z_4$.

(VI.14) PROPOSITION :

Si $V^2(d) = -2h\,\omega^2$, alors $\pi_1[M^6(h,\omega)] \approx Z \times Z_2$.

Preuve : D'après (V.7), on sait que $M^6(h,\omega) \simeq S^1 \times E_d$, ou E_d est l'espace obtenu à partir de $(\Sigma^2 \times S^3)$ en réduisant les deux sous-espaces $\{d_1\} \times S^3$ et $\{d_2\} \times S^3$ à un point. Il est clair que

$$\pi_1(E_d) \approx \pi_1(\Sigma^2) \approx Z_2 \text{ , d'où } \pi_1[M^6(h,\omega)] \approx Z \times Z_2$$

(VI.15) REMARQUE :

On observe à postériori, qu'à l'exclusion du cas où $V^2(c) < -2h.\,\omega^2$ (VI.4), et du cas où $V^2(b) < -2h\,\omega^2 < V^2(c)$ (IV.10), le premier groupe d'homotopie des composantes connexes de $M^6(h,\omega)$ contient toujours une copie du groupe libre à deux générateurs Z_2.

Les cas exclus correspondent physiquement à une situation où l'un des trois corps gravite assez loin des deux autres, qui restent à distance bornée.

C'est donc un cas "voisin" du cas intégrable du problème plan des trois corps.

Si l'on se rappelle que les problèmes intégrables de la mécanique classique mettent en cause des variétés intégrales toriques (voir [9]) , donc à π_1 abélien, il faut voir dans cette propriété de $\pi_1[M^6(h,\omega)]$ la raison probable de la non intégrabilité générique du problème plan des trois corps.

=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=

A P P E N D I C E 1

Dans la suite on désignera ρ_1, ρ_2, ρ_3 par x, y, z respectivement.

LEMME (A.1.1).

Si $m_1 \geqslant m_2 > m_3$ alors $1 < x < x_o$, où x_o est la racine positive de l'équation du 5ème degré.

$$A(x) \equiv x^5 + 2x^4 + x^3 - 4x^2 - 5x - 2, \quad (x_o = 1{,}431831618...).$$

Preuve.

On a déjà vu que $x \geqslant 1$ pour $m_2 \geqslant m_3$. D'autre part $f_1(x)$ s'écrit :

$$f_1(x) \equiv (x^3 - 1)(x + 1)^2 m_1 - [(1 + x)^3 - x^3] m_2 + x^2 [(1 + x)^3 - 1] m_3 = 0,$$

où

$$f_1(x) \equiv A(x) m_1 + [(1 + x)^3 - x^3](m_1 - m_2) + x^2 [(1 + x)^3 - 1] m_3 = 0,$$

avec

$$A(x) = (x^3 - 1)(x + 1)^2 - [(1 + x)^3 - x^3] = x^5 + 2x^4 + x^3 - 4x^2 - 5x - 2.$$

Pour $m_1 > m_2 > m_3$ on doit avoir alors, puisque $x \geqslant 1$,

$$A(x) \leqslant 0,$$

l'égalité ayant lieu seulement pour $m_1 = m_2$ et $m_3 = 0$.

On a

$$A'(x) = 5x^4 + 8x^3 + 3x^2 - 8x - 5 \geqslant 3x^2 \geqslant 3 \qquad \text{pour } x \geqslant 1,$$

d'où

x	1			1,4 x_o	1,5
A'(2)	3	+	+	+	+
A(x)	-7	↗	↗	⊙	

$A(1,4) = -1,03456$

$A(1,44) = 0,2829543420.$

Ainsi $A(x) \leqslant 0$ pour $x \geqslant 1$ entraine que

$$1 \leqslant x \leqslant x_o$$

(C.Q.F.D)

LEMME (A.1.2) :

Si $m_1 \geqslant m_2 > m_3$ alors $x\,y \leqslant 1$.

Preuve.

En effet, cela revient à démontrer que

$$f_2(1/x) \geqslant 0,$$

puisque f_1 est croissante au voisinage de son zéro, que $\frac{1}{x}$ est positif et que y est la seule racine positive de f_2.

On a

$$f_2(\tfrac{1}{x}) = (m_1 + m_2)\frac{1}{x^5} + (3m_1 + 2m_2)\frac{1}{x^4} + (3m_1 + m_2)\frac{1}{x^3} +$$
$$- (m_2 + 3m_3)\frac{1}{x^2} - (2m_2 + 3m_3)\frac{1}{x} - (m_2 + m_3).$$

Construisons alors la fonction :

$$F(x) = f_2(\tfrac{1}{x}) + \frac{1}{x^5} f_1(x);$$

qui est du même signe que $f_2(\frac{1}{x})$. On trouve

$$F(x) = (m_1 - m_2)\left(\frac{1}{x^4} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + 1\right) \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad m_1 \geqslant m_2 ,$$

l'égalité $x\,y = 1$ ayant lieu si et seulement si $m_1 = m_2$.

LEMME (A.1.3) :

Si $m_1 > m_2 > m_3$ alors $x < 1 + y^2$.

Preuve.

En effet cela revient à démontrer que

$$f_1(1 + y^2) > 0,$$

puisque f est croissante au voisinage de son zéro, que $(1 + y^2) > 0$, et que x est la seule racine positive de f_1.

On a

$$f_1(x) \equiv (x^3 - 1)(x + 1)^2 m_1 - [(1 + x)^3 - x^3] m_2 + x^2 [(1 + x)^3 - 1] m_3 = 0,$$

d'où

$$f_1(1+y^2) = [(1+y^2)^3-1] (2+y^2)^2 m_1-[(2+y^2)^3- (1+y^2)^3] m_2+(1+y^2)^2 [(2+y^2)^3-1] m_3,$$

ou

$$f_1(1+y^2) = (m_1+ m_3) y^{10}+ (7m_1+ 8m_3) y^9+ (19m_1+ 25m_3) y^6 +$$

$$+ (24m_1 - 3m_2 + 37m_3) y^4 + (12m_1 - 9m_2 + 26m_3) y^2+ 7 (m_3- m_2).$$

Construisons la fonction

$$F(y) = y f_1(1 + y^2) - \frac{7}{2} f_2(y)$$

qui est du même signe que $f_1(1 + y^2)$:

$$F(y) = (m_1 + m_3) y^{11} + (7m_1 + 8m_3) y^9 + (19m_1 + 25m_3) y^7 +$$

$$+ (\frac{41}{2} m_1 - \frac{13}{2} m_2 + 27m_3) y^5 - (\frac{21}{2} m_1 + \frac{7}{2} m_2) y^4 +$$

$$+ (\frac{3}{2} m_1 - \frac{25}{2} m_2 + 26 m_3) y^3 + (\frac{7}{2} m_2 + \frac{21}{2} m_3) y^2 +$$

$$+ \frac{35}{2} m_3 y + \frac{7}{2} (m_2 + m_3)$$

On a $F(y) = m_1 \alpha(y) + m_2 \beta(y) + m_3 \gamma(y)$,

avec

$$\alpha = \frac{3}{2} y^3 - \frac{21}{2} y^4 + \frac{41}{2} y^5 + 19y^7 + 7y^9 + y^{11},$$

$$\beta = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} y^2 - \frac{25}{2} y^3 - 7y^4 - \frac{13}{2} y^5,$$

$$\gamma = \frac{7}{2} + \frac{35}{2} y + \frac{21}{2} y^2 + 26y^3 + 37y^5 + 25y^7 + 8y^9 + y^{11} > 0.$$

Le discriminant du polynôme $(3 - 21y + 41y^2)$ est égal à $(- 51)$; donc ce polynôme est toujours positif. On en déduit que la fonction $\alpha(y)$ est positive ou nulle pour $0 \leqslant y \leqslant 1$.

On a alors $m_1 \alpha + m_2 \beta > m_2 \delta(y)$, où

$$\delta(y) = \alpha(y) + \beta(y) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} y^2 - 11y^3 - \frac{35}{2} y^4 + 14y^5 + 19y^7 + 7y^9 + y^{11}$$

Montrons que $\delta(y)$ reste positif pour $0 \leqslant y \leqslant 1$.

on a :

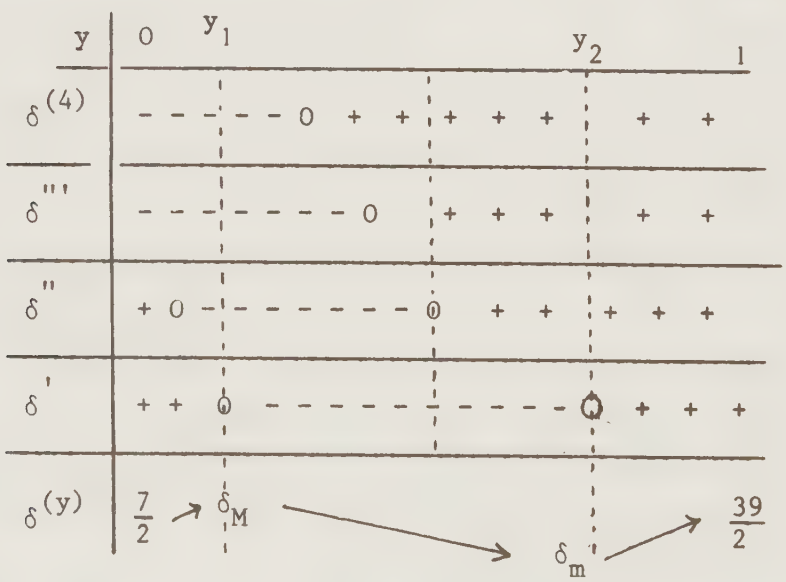
$$\delta'(y) = 7y - 33y^2 - 70y^3 + 70y^4 + 133y^6 + 63y^8 + 11y^{10},$$

$$\delta''(y) = 7 - 66y - 210y^2 + 280y^3 + 798y^5 + 504y^7 + 110y^9,$$

$$\delta'''(y) = - 66 - 420y + 740y^2 + 3990y^4 + 3528y^6 + 990y^8,$$

$$\delta^{(4)}(y) = - 420 + 1480y + 15960y^3 + 21168y^5 + 7920y^7 .$$

D'où le tableau des variations :



avec $y_1 = 0,164605....$

$y_2 = 0,691250917....$ et $\delta_m = \delta(y_2) = 1,455404630...$

Ainsi $\delta(y) > \delta_m > 0$ et $F(y) > 0$ pour $0 \leqslant y \leqslant 1$.

(C.Q.F.D)

Les trois lemmes précédents montrent que le point (x, y) se trouve dans le domaine hachuré A B C D, de la figure ci-contre, défini par

$$x\,y \leqslant 1\ ,$$

$$x < 1 + y^2\ ,$$

et $1 < x < x_o = 1{,}431831618.$

On constate que la parabole $x - 1 = y^2$ rencontre la droite $x = x_o$ au point $A(x_o, y_A)$ où $y_A = 0{,}657138964...$;

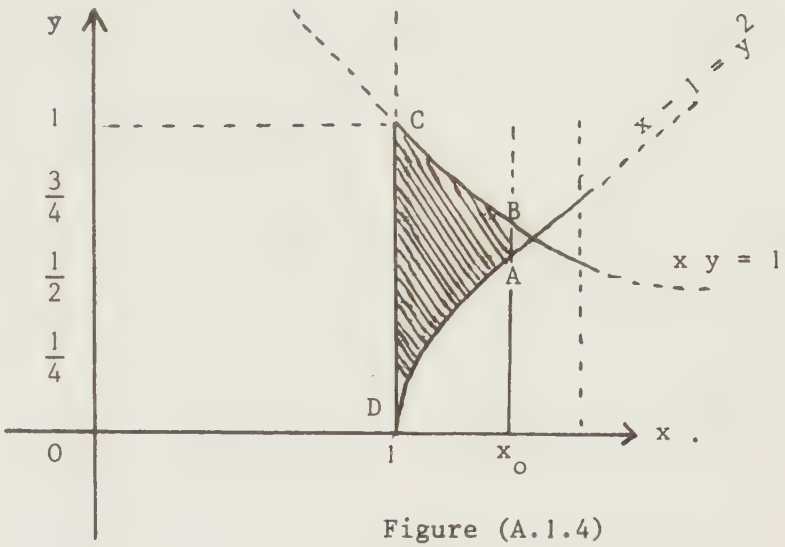


Figure (A.1.4)

et que l'hyperbole $x\,y = 1$ rencontre la droite $x = x_o$ au point $B(x_o, y_B)$, où $y_B = 0{,}698406145...$.

LEMME (A.1.5) :

Si $m_1 > m_2 > m_3$ alors $a_o \leqslant y\,z \leqslant 1$, où $a_o = 0{,}697628506...$ est la seule racine positive de l'équation $5a^3 - a - 1 = 0$.

Preuve.

1) Montrons que $y\,z \leqslant 1$. Cela revient à démontrer que $f_3(\frac{1}{y}) \geqslant 0$, puisque $\frac{1}{y}$ est positif et que z est la seule racine positive de f_3 qui est croissante au voisinage de son zéro. On a

$$f_3(\tfrac{1}{y}) = (m_2 + m_3)\,\frac{1}{y^5} + (3m_2 + 2m_3)\,\frac{1}{y^4} + (3m_2 + m_3)\,\frac{1}{y^3} - (m_3 + 3m_1)\,\frac{1}{y^2} +$$

$$- (3m_1 + 2m_3)\,\frac{1}{y} - (m_3 + m_1) = 0\ .$$

Construisons la fonction $F(y) = y^5\, f_3(\frac{1}{y}) + f_2(y)$, qui est du même signe que $f_3(\frac{1}{y})$. On trouve

$$F(y) = (m_2 - m_3)\,[y + 2y^2 + y^3 + 2y^4 + y^5] \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad m_2 \geqslant m_3\ .$$

(C.Q.F.D)

2) Pour que $y\ z \geqslant a_o$ il faut et il suffit que $f_2(\frac{a_o}{z}) \leqslant 0$, puisque f_2 est croissante au voisinage de son zéro, que $(\frac{a_o}{z})$ est positif et que y est la seule racine positive de f_2.

Soit la fonction $F(z, a, b) = z^5 f_2(\frac{a}{z}) + b f_3(z)$, qui est du même signe que $f_2(\frac{a}{z})$, où a et b sont deux paramètres positifs avec $a < 1$. On a :

$$z^5 f_2(\tfrac{a}{z}) = -(m_2+m_3) z^5 - a(2m_2+3m_3) z^4 - (m_2+3m_3) a^2 z^3 + (3m_1+m_2) a^3 z^2 + (3m_1+2m_2) a^4 z + (m_1+m_2) a^5 ,$$

d'où

$$F(z, a, b) = (b-1) m_2 + m_3) z^5 + [m_2 (3b - 2a) + m_3 (2b - 3a)] z^4 + [m_2(3b - a^2) + m_3(b - 3a^2)] z^3 + [m_1 (-3b + 3a^3) + m_2 a^3 - bm_3] z^2 + [m_1(-3b+3a^4) + 2m_2 a^4 - 2bm_3] z + [m_1(-b + a^5) + m_2 a^5 - bm_3]$$

$$\equiv F_5 z^5 + F_4 z^4 + F_3 z^3 + F_2 z^2 + F_1 z + F_o .$$

On va montrer que l'on peut choisir a et b, tels que

$$0 < a < 1 \quad \text{et} \quad b > 0,$$

pour que F soit négatif ou nul sachant que $z \geqslant 1$.

On a $F_5 = (b - 1)(m_2 + m_3) \leqslant 0$ pour $b \leqslant 1$.

Prenons donc

$$(5) \qquad 0 \leqslant b \leqslant 1,$$

on a alors

$$z F_5 + F_4 < [(4b - 2a - 1) m_2 + m_3(3b - 3a - 1)],$$

Prenons

$$(4) \qquad (4b - 2a - 1) \leqslant 0$$

qui entraîne (5) puisque $a < 1$. On en déduit alors :

$$z F_5 + F_4 < [(4b - 2a - 1) m_2 + (3b - 3a - 1)] < m_3 [7b - 5a - 2] < 0,$$

car (4) donne $7b - 5a - 2 < \frac{7}{4}(2a + 1) - 5a - 2 = \frac{-(6a+1)}{4} < 0.$

Ainsi la condition (4) donne :

$$z^2 F_5 + z F_4 + F_3 < [(7b - a^2 - 2a - 1) m_2 + (4b - 3a^2 - 3a - 1) m_3]$$

Prenons

$$(3) \qquad 7b < (a + 1)^2$$

qui donne

$$4b - 3a^2 - 3a - 1 < \frac{-(17a^2 + 13a + 3)}{7} < 0,$$

et qui entraîne (4) puisque

$$4b - 2a - 1 < \frac{4a^2 - 6a - 3}{7} < 0 \quad \text{pour} \quad 0 < a < 1 ;$$

d'où

$$z^2 F_5 + z F_4 + F_3 < [(7b - a^2 - 2a - 1) m_2 + m_3(4b - 3a^2 - 3a - 1)] < 0,$$

et alors

$$z^3 F_5 + z^2 F_4 + z F_3 + F_2 < [m_1(-3b + 3a^3) + (7b + a^3 - a^2 - 2a - 1) m_2 + m_3(3b - 3a^2 - 3a - 1)] .$$

Pour rendre négatif ce dernier crochet prenons

$$(2) \qquad b > a^3 \qquad \text{et}$$

$$(1) \qquad b < \frac{(a + 1)^2}{4} - a^3$$

Pour que (1) et (2) soient compatibles il faut que

$$a^3 < \frac{(a + 1)^2}{4} - a^3 ,$$

c'est-à-dire que $8a^3 - (a + 1)^2 < 0$, ou que $a < 0{,}716918...$

D'autre part pour que (1) entraîne (3) il faut que :

$$7b - (a + 1)^2 < \frac{3(a + 1)^2 - 28a^3}{4} < 0 .$$

Soit $g(a) = -28a^3 + 3(a + 1)^2$, d'où

$$g'(a) = 2 + 6a - 84a^2 = 0 \qquad \text{pour} \qquad a = \frac{3 \pm \sqrt{177}}{42} , \text{ et}$$

a	0			$\frac{3+\sqrt{177}}{42}$			1
g'(a)		+	+	0	−	−	−
g(a)	+	+	+		+	+	0 − − −

on en déduit que $g(a) \leqslant 0$ pour $a \geqslant 0{,}446...$

Ainsi la double inégalité

$$(I) \qquad a^3 < b < \frac{(a+1)^2}{4} - a^3$$

avec $$(II) \qquad 0{,}446... < a < 0{,}716918...$$

entraîne que

$$[m_1 (-3b + 3a^3) + (7b + a^3 - a^2 - 2a - 1)\, m_2 + (3b - 3a^2 - 3a - 1)m_3] < 0,$$

puisque (I) implique que $(3b - 3a^2 - 3a - 1) < \frac{-(12a^3 + 9a^2 + 6a + 1)}{4} < 0.$

On a alors

$$z^4 F_5 + z^3 F_3 + z^2 F_2 + z F_1 + F_o < [m_1(-3b + 3a^4) + (4b + 4a^3 + 2a^4 - a^2 - 2a - 1)m_2 + (b - 3a^2 - 3a - 1)m_3],$$

or $b > a^3 > a^4$, d'où l'inégalité

$$m_1(-3b + 3a^4) + (4b + 4a^3 + 2a^4 - a^2 - 2a - 1)m_2 < m_2 [b + 5a^4 + 4a^3 - a^2 - 2a - 1] < 0,$$

qui s'obtient en imposant

$$(III) \qquad a^3 < b < (a+1)^2 - 4a^3 - 5a^4 ,$$

qui entraîne aussi que

$$(b - 3a^2 - 3a - 1) < -(5a^4 + 4a^3 + 2a^2 + a) < 0.$$

Donc en supposant que (I) et (II) sont vérifiés, (III) donne :

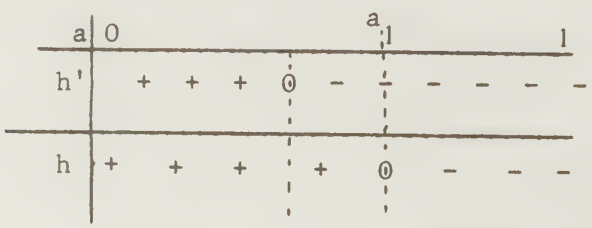
$$[m_1(-3b + 3a^4) + (4b + 4a^3 + 2a^4 - a^2 - 2a - 1)m_2 + (b - 3a^2 - 3a - 1)m_3] < 0.$$

D'autre part (III) implique (I) si

$$\frac{1}{4} h(a) \equiv (a+1)^2 - 4a^3 - 5a^4 + a^3 - \frac{(a+1)^2}{4} \leqslant 0.$$

On a $$h(a) = 3(a+1)^2 - 12a^3 - 20a^4 ,$$

$$h'(a) = 6 + 6a - 36a^2 - 80a^3$$



et l'on constate que $h(a) \leqslant 0$ pour $a > a_1 = 0,69276923...$

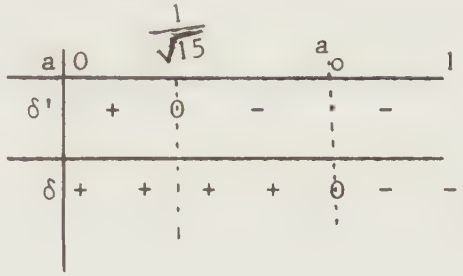
La condition (III) implique aussi que

$$a^3 \leqslant (1 + a)^2 - 4a^3 - 5a^4 , \qquad \text{ou que}$$

$$(1 + a)^2 - 5a^3(1 + a) \geqslant 0 \qquad \text{ou bien que}$$

$$\delta(a) \equiv 1 + a - 5a^3 \geqslant 0.$$

on a : $\delta'(a) = 1 - 15a^2$



On en déduit que $\delta(a) \geqslant 0$ pour

$$a \leqslant a_o = 0,697628506 ,$$

a_o étant la seule racine positive de $\delta(a)$.

Il en résulte que les conditions

(III) $$a^3 \leqslant b \leqslant (a + 1)^2 - 4a^3 - 5a^4 \qquad \text{et}$$

(IV) $$a_1 \leqslant a \leqslant a_o$$

avec $a_o = 0,697628516$ et $a_1 = 0,69276923...$

entraînent que

$$F(z, a, b) < F_o + [m_1(-3b + 3a^4) + (4b + 4a^3 + 2a^4 - a^2 - 2a - 1)m_2 + (b - 3a^2 - 3a - 1)m_3] < F_o .$$

Or $$F_o = m_1(-b + a^5) + m_2 a^5 - bm_3 < m_2(-b + 2a^5) - bm_3 ,$$

donc $F_o < 0$ si $b > 2a^5$.

Prenons finalement $a = a_o$, ce qui entraîne que

$$b = a_o^3 = 0,339525701...$$

Cette valeur de b vérifie la condition $b > 2a^5$, car

$$2a_o^5 = 0,330484493...$$

En conclusion $F(z, a_o, a_o^3) < 0$, et alors

$$a_o \leqslant y\, z \leqslant 1 ,$$

où a_o est la seule racine positive de $(1 + a - 5a^3) = 0$

(C.Q.F.D)

LEMME (A.1.6) :

Si $m_1 > m_2 > m_3$ alors $\frac{1}{z} \leqslant y + y^2$.

Preuve.

En effet cela revient à démontrer que

$$f_3\left(\frac{1}{y + y^2}\right) \leqslant 0 ,$$

puisque f_3 est croissante au voisinage de son zéro, que $\left(\frac{1}{y^2 + y}\right)$ est positif et que z est la seule racine positive de f_3 .

On a

$$G(y) \equiv (y^2+ y)^5 f_3 \left(\frac{1}{y^2+ y}\right) = - (m_3+ m_1) (y^2+ y)^5 - (3m_1+ 2m_3)(y^2+ y)^4$$

$$- (m_3+ 3m_1)(y^2+ y)^3 + (3m_2+ m_3)(y^2+ y)^2+ (3m_2+ 2m_3)(y^2+ y)+ (m_2+ m_3).$$

D'où

$$G(y) = - (m_3+ m_1)y^{10}- 5(m_3+ m_1)y^9- (13m_1+ 12m_3)\, y^8- (22m_1+ 18m_3)\, y^7-$$

$$- (26m_1+ 18m_3)\, y^6- (22m_1+ 12m_3)\, y^5- (12m_1- 3m_2+ 4m_3)\, y^4$$

$$- (3m_1- 6m_2- m_3)\, y^3+ (6m_2+ 3m_3)\, y^2+ (3m_2+ 2m_3)\, y + (m_2+ m_3).$$

Ajoutons $f_2(y)$ à $G(y)$:

$$G(y) + f_2(y) = - (m_3+ m_1)\, y^{10}- 5\, (m_3+ m_1)\, y^9- (13m_1+ 12m_3)y^8-(22m_1+ 18m_3)y^7$$

$$- (26m_1+ 18m_3)y^6- (21m_1- m_2+ 12m_3)\, y^5- (9m_1- 5m_2+ 4m_3)\, y^4$$

$$+ (7m_2+ m_3)\, y^3+ 5m_2\, y^2 + (m_2- m_3)y .$$

Ajoutons $y\, f_2(y)$:

$$G(y)+(1+y)\, f_2(y) = -(m_3+m_1)y^{10} - 5(m_3+m_1)y^9 - (13m_1+12m_3)y^8 - (22m_1+18m_3)y^7$$
$$- (25m_1 - m_2 + 18m_3)y^6 - (18m_1 - 3m_2 + 12m_3)y^5 - (6m_1 - 6m_2 + 4m_3)y^4$$
$$+ (6m_2 - 2m_3)y^3 + 3(m_2 - m_3)y^2 - 2m_3\, y\ .$$

Finalement, on voit qu'il faut ajouter $[3y^2\, f_2(y)]$ pour résorber les derniers termes négatifs de ce polynôme :

$$F(y) \equiv G(y) + (1 + y + 3y^2)\, f_2(y) =$$
$$= -(m_3+m_1)y^{10} - 5(m_3+m_1)y^9 - (13m_1+12m_3)y^8 - (19m_1 - 3m_2 + 18m_3)y^7$$
$$- (16m_1 - 7m_2 + 18m_3)y^6 - (9m_1 - 6m_2 + 12m_3)y^5 - (6m_1 - 3m_2 + 13m_3)y^4 +$$
$$- 11m_3\, y^3 - 6m_3\, y^2 - 2m_3\, y \leqslant 0\ ,$$

si $m_1 \geqslant m_2 \geqslant m_3$. Or $F(y)$ est du même signe que $f_2\left(\frac{1}{y^2+y}\right)$ donc on a bien

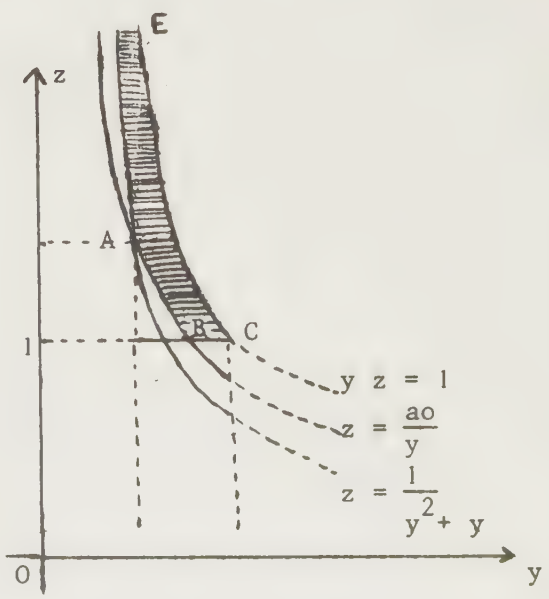
$$\frac{1}{z} < y + y^2$$

(C.Q.F.D)

Les deux lemmes précédents montrent que le point (y, z) se trouve dans le domaine, D' hachuré A B C E , de la figure ci-contre, défini par

$$a_o \leqslant y\, z \leqslant 1\ , \qquad a_o = 0{,}697628506\ ,$$
$$z \geqslant 1\ , \quad \frac{1}{z} \leqslant y + y^2.$$

On remarque que les deux hyperboles $y\, z = 1$ et $y\, z = a_o$ se coupent seulement en E à l'infini, alors que les deux courbes $y\, z = a_o$ et $z = \frac{1}{y^2+y}$ se coupent



à l'infini en E et au point A de coordonnées

$$y_A = \frac{1 - a_o}{a_o} = 0{,}433427664\ldots,$$

$$z_A = \frac{a_o^2}{1 - a_o} = 1{,}609561557\ .$$

On peut vérifier que pour $z = z_o \geqslant z_A$ la courbe $z = \frac{1}{y^2 + y}$ se trouve entre les deux autres. Donc pour $z > z_A$ la frontière du domaine est est formée par l'arc $\overset{\frown}{AE}$ de la courbe $z = \frac{1}{y^2 + y}$ et par l'arc d'hyperbole $y\,z = 1$, alors que pour $1 \leqslant z \leqslant z_A$ la frontière du domaine est fermée par l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de l'hyperbole $z = \frac{ao}{y}$.

A P P E N D I C E 2

PROPOSITION A.2.1.

Si $m_1 > m_2 > m_3$ alors les trois minima relatifs de la fonction $V(s)$ vérifient les inégalités suivantes :

$$V(a) < V(b) < V(c) ,$$

où $$V(s) = \frac{m_1 m_2}{s^3} + \frac{m_1 m_3}{s^2} + \frac{m_2 m_3}{s^1} ,$$

$$U_1 \equiv \frac{(1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{(m_1)^5} V^2(a) = [\varepsilon_3 + \varepsilon_2 \rho_1^2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 (1 + \rho_1)^2][\varepsilon_3 + \frac{\varepsilon_2}{\rho_1} + \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{1+\rho_1}]^2 ,$$

$$U_2 \equiv \frac{(1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{(m_1)^5} V^2(b) = [\varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \rho_2^2 + \varepsilon_3 (1 + \rho_2)^2][\varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{\rho_2} + \frac{\varepsilon_3}{1+\rho_2}]^2 ,$$

$$U_3 \equiv \frac{(1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{(m_1)^5} V^2(c) = [\varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \rho_3^2 + \varepsilon_2 (1 + \rho_3)^2][\varepsilon_2 \varepsilon_3 + \frac{\varepsilon_3}{\rho_3} + \frac{\varepsilon_2}{1+\rho_3}]^2 ,$$

avec $\varepsilon_2 = \frac{m_2}{m_1}$, $\varepsilon_3 = \frac{m_3}{m_1}$, ρ_i $(i = 1,2,3)$ étant la seule racine réelle positive de l'équation du 5ème degré $f_i(\rho_i)$ pour ε_2 et ε_3 donnés.

A.2.2. SCHEMA DE LA DEMONSTRATION :

On va démontrer que

(1) $U_2 - U_1 \geqslant 0$

(2) $U_3 - U_2 \geqslant 0$

pour $m_1 \geqslant m_2 \geqslant m_3$.

Observons que $(U_2 - U_1) \equiv W_1\ [\varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \rho_1(\varepsilon_2,\ \varepsilon_3),\ \rho_2(\varepsilon_2,\ \varepsilon_3)]$,

$$(U_3 - U_2) \equiv W_2\ [\varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \rho_2(\varepsilon_2,\ \varepsilon_3),\ \rho_3(\varepsilon_2,\ \varepsilon_3)]\ ;$$

mais l'expression de $\rho_i(\varepsilon_2,\ \varepsilon_3)$ n'étant pas connue algébriquement sous forme précise et finie, la démonstration de (1) et (2) est difficile. Pour contourner cette difficulté nous remarquons que :

α) Les deux équations $f_1(\rho_1) = 0$ et $f_2(\rho_2) = 0$ permettent d'écrire ε_2 et ε_3 en fonction de ρ_1 et de ρ_2 ; ce qui nous amène à considérer $(U_2 - U_1)$ comme fonction $\tilde{W}(\rho_1,\ \rho_2)$;

β) Les deux équations $f_2(\rho_2) = 0$ et $f_3(\rho_3) = 0$ permettant d'écrire ε_2 et ε_3 comme fonction de ρ_2 et de ρ_3 ; ce qui nous amène à considérer $(U_3 - U_2)$ comme fonction $\tilde{W}_2(\rho_2,\ \rho_3)$.

D'autre part, on constate que $\tilde{W}_1(\rho_1,\ \rho_2)$ [respectivement $\tilde{W}_2(\rho_2,\ \rho_3)$] est une fonction rationnelle de $(\rho_1,\ \rho_2)$ dont le dénominateur reste positif ; donc le problème se ramène à démontrer qu'un polynôme à deux variables ρ_1 et ρ_2 (respectivement ρ_2 et ρ_3) garde un signe constant positif dans un domaine à préciser du plan $(\rho_1,\ \rho_2)$ (respectivement $(\rho_2,\ \rho_3)$).

Pour alléger les notations ρ_1, ρ_2, ρ_3 seront désignés par x, y et z respectivement.

A.2.3. CALCUL DE $\tilde{W}_1(x, y)$ ET DE $\tilde{W}_2(y, z)$.

a) Cherchons $\tilde{W}_1(x, y)$.

on a :

$$W_1 = U_2 - U_1 = \varepsilon_3 \left\{(1 + y)^2 \left[\varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_2\,\varepsilon_3}{y} + \frac{\varepsilon_3}{1+y}\right]^2 - \left[\varepsilon_3 + \frac{\varepsilon_2}{x} + \frac{\varepsilon_2\,\varepsilon_3}{1+x}\right]^2\right\} +$$

$$+ \varepsilon_2 \left\{\left[\varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_2\,\varepsilon_3}{y} + \frac{\varepsilon_3}{1+y}\right]^2 - x^2 \left[\varepsilon_3 + \frac{\varepsilon_2}{x} + \frac{\varepsilon_2\,\varepsilon_3}{1+x}\right]^2\right\} +$$

$$+ \varepsilon_2\,\varepsilon_3 \left\{y^2 \left[\varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_2\,\varepsilon_3}{y} + \frac{\varepsilon_3}{1+y}\right]^2 - (1 + x)^2 \left[\varepsilon_3 + \frac{\varepsilon_2}{x} + \frac{\varepsilon_2\,\varepsilon_3}{1+x}\right]^2\right\},$$

$$W_1 = \varepsilon_2\,\varepsilon_3\,\{[\varepsilon_2(1 + y + \tfrac{1}{x}) + \varepsilon_2\,\varepsilon_3\,(\tfrac{1+y}{y} + \tfrac{1}{1+x}) + 2\varepsilon_3]\,[(1 + y\,\tfrac{1}{x}) + \varepsilon_3(\tfrac{1+y}{y} - \tfrac{1}{1+x})]$$

$$+ [2\varepsilon_2 + \varepsilon_2\,\varepsilon_3(\tfrac{1}{y} + \tfrac{x}{1+x}) + \varepsilon_3(\tfrac{1}{1+y} + x)]\,[(\tfrac{1}{1+y} - x) + \varepsilon_2(\tfrac{1}{y} - \tfrac{x}{1+x})] +$$

$$+ \{\varepsilon_2(y + \tfrac{1+x}{x}) + 2\varepsilon_2\,\varepsilon_3 + \varepsilon_3(\tfrac{y}{1+y} + 1 + x)][\varepsilon_2(y - \tfrac{1+x}{x}) + \varepsilon_3(\tfrac{y}{1+y} - 1 - x)]\},$$

$$W_1 = \varepsilon_2\varepsilon_3[A_2\varepsilon_2 + A_3\varepsilon_3 + A_{22}(\varepsilon_2)^2 + A_{33}(\varepsilon_3)^2 + A_{23}\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3 + A_{223}(\varepsilon_2)^2\,\varepsilon_3 + A_{233}\,\varepsilon_2(\varepsilon_3)^2],$$

avec

$$A_2 = [(1 + y)^2 - \tfrac{1}{x^2}] + 2\,[\tfrac{1}{1+y} - x]\,,\quad A_3 = [\tfrac{1}{(1+y)^2} - x^2] + 2(1 + y - \tfrac{1}{x})\,,$$

$$A_{22} = [y^2 - \tfrac{(1+x)^2}{x^2}] + 2\,(\tfrac{1}{y} - \tfrac{x}{1+x})\,,\quad A_{33} = [\tfrac{y^2}{(1+y)^2} - (1 + x)^2] + 2\,(\tfrac{1+y}{y} - \tfrac{1}{(1+x)})\,,$$

$$A_{23} = \tfrac{4(x-y)(1-x\,y)}{x\,y}\,,\quad A_{223} = [\tfrac{1}{y^2} - \tfrac{x^2}{(1+x)^2} + 2(y - \tfrac{1+x}{x})]\,,$$

$$A_{233} = [\tfrac{(1+y)^2}{y^2} - \tfrac{1}{(1+x)^2} + 2(\tfrac{y}{1+y} - 1 - x)]$$

On a $\quad f_1(x) \equiv (x^3 - 1)\,(1 + x)^2\,m_1 - [(1 + x)^3 - x^3]\,m_2 + x^2[(1 + x)^3 - 1]\,m_3 = 0,$

$$f_2(y) \equiv y^2[(1 + y)^3 - 1]\,m_1 + (y^3 - 1)(1 + y)^2\,m_2 - [(1 + y)^3 - y^3]\,m_3 = 0,$$

$$f_3(y) \equiv -[(1 + z)^3 - z)^3 - z^3]\,m_1 + z^2[(1 + z)^3 - 1]\,m_2 + (z^3 - 1)(1+z)^2 m_3 = 0,$$

Les deux premières équations donnent

$$\varepsilon_3 = \frac{N_3}{D}\,,\quad \varepsilon_2 = \frac{N_2}{D}\,,\ \text{où}$$

$$D = [(1 + y)^3 - y^3]\,[(1 + x)^3 - x^3] + x^2\,[(1 + x)^3 - 1](1 - y^3)(1 + y)^2,$$

$$N_2 = (x^3 - 1)(x + 1)^2\,[(1 + y)^3 - y^3] + x^2\,y^2\,[(1 + y)^3 - 1]\,[(1 + x)^3 - 1],$$

$$N_3 = y^2\,[(1 + y)^3 - 1][(1 + x)^3 - x^3] - (x^3 - 1)\,(1 - y^3)(x + 1)^2\,(y + 1)^2.$$

On constate que $D(x, y)$ reste positif ($\geqslant 14$) pour

$$x \geqslant 1 \ , \ 0 \leqslant y \leqslant 1 \ .$$

D'autre part on sait que $m_1 = m_2 \iff x\,y = 1$, d'où $\varepsilon_2 = 1 - \frac{A}{D}(1 - x\,y)$, avec

$$A(x,y) = 2 + 5x + 6y + 4x^2 + 17x\,y + 6y^2 + 2x^3 + 17x^2y + 21xy^2 + x^4 + 29x^2y^2 +$$

$$+ 7x^3y + 6xy^3 + 21x^2y^3 + 17x^3y^2 + 2x^4y + 4x^4y^2 + 17x^3y^3 + 6x^2y^4 +$$

$$+ 5x^4y^3 + 6x^3y^4 + 2x^4y^4 > 14 > 0 \ .$$

Remarquons que $A(x, y)$ est de degré 8 par rapport à l'ensemble des deux variables x et y.

On a vu déjà que W_1 s'annule pour $\varepsilon_2 = 1$, donc on doit pouvoir mettre $(1 - x\,y)$ en facteur dans $\widetilde{W}_1(x, y)$:

On a :

$$\frac{W_1}{\varepsilon_2\,\varepsilon_3} = \varepsilon_2(A_2 + A_{22}) + \varepsilon_2(\varepsilon_2 - 1)\,A_{22} + \varepsilon_3(A_3 + A_{322}) + \varepsilon_3(\varepsilon_2^2 - 1)\,A_{322} +$$

$$+ (\varepsilon_3)^2\,(A_{33} + A_{233}) + (\varepsilon_3)^2\,(\varepsilon_2 - 1)\,A_{233} + A_{23}\cdot\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3 \ ,$$

Avec $A_2 + A_{22} = \dfrac{1}{yx^2(1+x)(1+y)}\,\{yx^2(1+x)(1+y)^3 - y(1+x)(1+y) + 2yx^2(1+x) - 2x^3y(1+x)(1+y)$

$$+ y^3x^2(1+x)(1+y) - y(1+x)^3(1+y) + 2x^2(1+x)(1+y) - 2yx^3(1+y)\},$$

ou

$$A_2 + A_{22} = \frac{1}{yx^2(1+x)(1+y)}\,\{y(1+x)(1+y)(y^2x^2-1) + y(1+x)(1+y)[\,x^2(1+y)^2 - (1+x)^2\,] +$$

$$+ 2yx^2[1+x-x(1+y)] + 2x^2(1+x)(1+y)(1-xy)\} \ ,$$

ou bien

$$A_2 + A_{22} = \frac{(1-xy)}{yx^2(1+x)(1+y)}\,[2yx^2 + 2x^2(1+x)(1+y) - 2y(1+x)(1+y(1+x+xy))] \ .$$

De même

$$A_3+A_{322}=\frac{1}{y^2x(1+x)^2(1+y)^2}\{xy^2(1+x)^2-x^3y^2(1+x)^2(1+y)^2+2xy^2(1+x)^2(1+y)^3-2y^2(1+x)^2(1+y)^2+$$

$$+x(1+x)^2(1+y)^2-x^3y^2(1+y)^2+2xy^3(1+x)^2(1+y)^2-2y^2(1+x)^3(1+y)^2\}$$

$$=\frac{1}{xy^2(1+x)^2(1+y)^2}\{xy^2[(1+x)^2-x^2(1+y)^2]+x(1+x)^2(1+y)^2(1-x^2y^2)+$$

$$+2y^2(1+x)^2(1+y)^2[x(1+y)-(1+x)]+2y^2(1+x)^2(1+y)^2(xy-1)\},$$

ou

$$A_3+A_{322}=\frac{(1-x\ y)}{xy^2(1+x)^2(1+y)^2}[xy^2(1+2x+xy)+x(1+x)^2(1+y)^2(1+xy)-4y^2(1+x)^2(1+y)^2].$$

on a aussi

$$A_{33}+A_{233}=\frac{1}{y^2(1+x)^2(1+y)^2}[y^4(1+x)^2-y^2(1+x)^4(1+y)^2+2y(1+x)^2(1+y)^3-2y^2(1+x)(1+y)^2+$$

$$+(1+x)^2(1+y)^4-y^2(1+y)^2+2y^3(1+x)^2(1+y)-2y^2(1+x)^3(1+y)^2],$$

$$A_{33}+A_{233}=\frac{1}{y^2(1+x)^2(1+y)^2}\{y2[(1+x)^2y^2-(1+y)^2]+(1+x)^2(1+y)^2[(1+y)^2-y^2(1+x)^2]+$$

$$+2y(1+x)^2(1+y)^2[(1+y)-y(1+x)]+2y^2(1+x)(1+y)[(1+x)y-(1+y)]\},$$

ou

$$A_{33}+A_{233}=\frac{(1-x\ y)}{y^2(1+x)^2(1+y)^2}[(1+2y+xy)(1+x+2y+xy)+2y(1+x)(1+y)](1+x+xy)\ ;$$

d'où

$$\frac{\tilde{W}_1(x,y)}{\varepsilon_2\ \varepsilon_3}=(1-xy)\{\frac{2}{yx^2(1+x)(1+y)}[yx^2+x^2(1+x)(1+y)-y(1+x)(1+y)(1+x+xy)]+$$

$$\frac{-A}{D.yx^2(1+x)(1+y)}[y^3x^2(1+x)(1+y)-y(1+x)^3(1+y)+2x^2(1+x)(1+y)-2yx^3(1+y)]$$

$$-\frac{2A(1-x\ y)}{D.yx^2(1+x)(1+y)}[yx^2+x^2(1+x)(1+y)-y(1+x)(1+y)(1+x+xy)]+$$

$$+\frac{A^2(1-x\ y)}{D^2yx^2(1+x)(1+y)}[y^3x^2(1+x)(1+y)-y(1+x)^3(1+y)+2x^2(1+x)(1+y)-2yx^3(1+y)]$$

$$+\frac{\varepsilon_3}{xy^2(1+x)^2(1+y)^2}[xy^2(1+2x+xy)+x(1+x)^2(1+y)^2(1+xy)-4y^2(1+x)^2(1+y)^2]$$

$$- \frac{2\,\varepsilon_3\,A}{Dxy^2(1+x)^2(1+y)^2}[x(1+x)^2(1+y)^2-x^3y^2(1+y)^2+2xy^3(1+x)^2(1+y)^2-2y^2(1+x)^3(1+y)^2]$$

$$+ \frac{\varepsilon_3\,A^2(1-x\,y)}{xy^2(1+x)^2(1+y)^2}\,[x(1+x)^2(1+y)^2-\,x^3y^2(1+y)^2+2xy^3(1+x)^2-(1+y^2-2y^2(1+x)^3(1+y)^2]$$

$$+ \frac{4\,\varepsilon_3(x-y)}{x\,y} - \frac{4A.\varepsilon_3}{Dxy}\,(x-y)\,(1-xy) +$$

$$+ \frac{(\varepsilon_3)^2(1+x+xy)}{y^2(1+x)^2(1+y)^2}[(1+2y+xy)(1+x+2y+xy)+2y(1+x)(1+y)] +$$

$$- \frac{(\varepsilon_3)^2\,A}{Dy^2(1+x)^2(1+y)^2}\,[(1+x)^2(1+y)^4-\,y^2(1+y)^2+\,2y^3(1+x)^2(1+y)+\,2y^3(1+x)^2(1+y)$$

$$- 2y^2(1+x)^3(1+y)^2]\}\ .$$

On trouve alors que

$$\frac{x^2y^2(1+x)^2(1+y)^2\,\tilde{W}_1}{\varepsilon_2\,\varepsilon_3(1-xy)}.\ D^3 = P(x,\,y) \quad \text{où}$$

$$P(x,y) = 2y(1+x)(1+y)\,D^3\,[yx^2+x^2(1+x)(1+y)-y(1+x)(1+y)(1+x+xy)] +$$

$$- y(1+x)(1+y)\,A\,D^2[y^3x^2(1+x)(1+y)-y(1+x)^3(1+y)+2x^2(1+x)(1+y)-2yx^3(1+y)] +$$

$$- 2y(1+x)(1+y)(1-xy)AD^2[yx^2+x^2(1+x)(1+y)-y(1+x)(1+y)(1+x+xy)] +$$

$$+ y(1+x)(1+y)(1-xy)\,A^2D[y^3x^2(1+x)(+y)-y(1+x)^3(1+y)+2x^2(1+x)(1+y)-2yx^3(1+y)]$$

$$+ x\,N_3\,D^2[xy^2(1+2x+xy)+\,x(1+x)^2(1+y)^2(1+xy)-4y^2(1+x)^2(1+y)^2] +$$

$$- 2x\,N_3\,AD[x(1+x)^2(1+y)^2-x^3y^2(1+y)^2+2xy^3(1+x)^2(1+y)^2-2y^2(1+x)^3(1+y)^2] +$$

$$+ x(1-xy)A^2N_3[x(1+x)^2(1+y)^2-x^3y^2(1+y)^2+2xy^3(1+x)^2(1+y)^2-2y^2(1+x)^3(1+y)^2]$$

$$+ 4xy(1+x)^2(1+y)^2(x-y)N_3\,D^2-4\,xy(1+x)^2(1+y)^2(x-y)(1-xy)DN_3\,A +$$

$$+ x^2(N_3)^2D\,(1+x+xy)[(1+2y+xy)(1+x+2y+xy)+\,2y(1+x)(1+y)] +$$

$$- x^2(N_3)^2A\,(1+x+xy)[(1+y)^2(1+x+2y+xy)-\,2y^2(1+x)^2(1+y)]\ .$$

Maintenant il faut développer l'expression du second membre pour avoir $P(x, y)$ sous la forme

$$P(x, y) = \sum_{i=1}^{19} \sum_{j=1}^{19} P_{ij} \; x^{i-1} \; y^{j-1} \; .$$

Mais ce calcul est pratiquement impossible à mener correctement à la main ; On le fait sur ordinateur. Une fois, connue l'expression de $P(x, y)$ on effectue le changement de variables $X = x - 1$, $Y = y$, qui permet de minorer P par un polynôme positif dans le domaine D où varie (X, Y).

Le calcul de $P(x, y)$ a été fait au centre de calcul de "l'Institut National d'Astronomie et de Géodésie" à l'observatoire de Meudon sur l'ordinateur IBM 360-65.

Le programme utilisé à cet effet a été conçu par Monsieur VU ingénieur du C.N.R.S. au "Bureau des Longitudes".

C'est un programme de multiplication de polynômes, dont l'idée principale est la suivante :

Pour fixer les idées on suppose que l'on a à multiplier des polynômes à trois variables x, y, et z dont le degré du produit est inférieur à 40.

Pour chaque terme de la forme $a \; x^{\beta} \; y^{\gamma} \; z^{\delta}$, où β, γ, δ sont des nombres positifs ou nuls ne dépassant pas 40, on construit un nombre

$$M = (\gamma + \beta + \delta) \; 10^7 + \alpha + 40 \; \beta + (40)^2 \; \gamma + (40)^3 \; \delta,$$

avec $\alpha = 0$ ou 1. Inversement si l'on connait M on peut déduire 4 nombres α, β, γ et δ compris entre 0 et 40 de la manière suivante :

L'ordre du terme $(\gamma + \beta + \delta)$ est égal au quotient de M par 10^7, et si l'on désigne par M_1 le reste de la division de M par 10^7, alors

α est le reste de la division de M_1 par 40,

β est le quotient par 40 du reste de la division de M_1 par $(40)^2$,

γ est le quotient par $(40)^2$ du reste de la division de M_1 par $(40)^3$, et

δ est le quotient par $(40)^3$ du reste de la division de M_1 par $(40)^4$.

Il en résulte que la multiplication de deux termes, du polynôme, caractérisés par deux nombres M' et M" respectivement, donne un terme caractérisé par le nombre (M' + M").

La suite du calcul a été faite sur la calculatrice "Control Data Corporation 6600" au "Centre de Physique Nucléaire de la Faculté des Sciences de Paris", et les programmes utilisés à cet effet ont été faits par l'auteur.

b) On a aussi

$$W_2 = U_3 - U_2 = \varepsilon_2 \{(1+z)^2 [\varepsilon_2\varepsilon_3 + \frac{\varepsilon_3}{z} + \frac{\varepsilon_2}{1+z}]^2 - [\varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_2\varepsilon_3}{y} + \frac{\varepsilon_3}{1+y}]^2\} +$$

$$+ \varepsilon_3 \{z^2 [\varepsilon_2\varepsilon_3 + \frac{\varepsilon_3}{z} + \frac{\varepsilon_2}{1+z}]^2 - (1+y)^2 [\varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_2\varepsilon_3}{y} + \frac{\varepsilon_3}{1+y}]^2\} +$$

$$+ \varepsilon_2\varepsilon_3 \{[\varepsilon_2\varepsilon_3 + \frac{\varepsilon_3}{z} + \frac{\varepsilon_2}{1+z}]^2 - y^2 [\varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_2\varepsilon_3}{y} + \frac{\varepsilon_3}{1+y}]^2\} ,$$

$$W_2 = \varepsilon_2 [2\varepsilon_2 + \varepsilon_3(\frac{1+z}{z} + \frac{1}{1+y}) + \varepsilon_2\varepsilon_3(1+z+\frac{1}{z})] [\varepsilon_3(\frac{1+z}{z} - \frac{1}{1+y}) + \varepsilon_2\varepsilon_3(1+z-\frac{1}{y})] +$$

$$+ \varepsilon_3[\varepsilon_2(\frac{z}{1+z} + 1+y) + 2\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3(z + \frac{1+y}{y})] [\varepsilon_2(\frac{z}{1+z} - 1-y) + \varepsilon_2\varepsilon_3(z - \frac{1+y}{y})] +$$

$$+ \varepsilon_2\varepsilon_3[\varepsilon_2(\frac{1}{1+z} + y) + \varepsilon_3(\frac{1}{z} + \frac{y}{1+y}) + 2\varepsilon_2\varepsilon_3][\varepsilon_2(\frac{1}{1+z} - y) + \varepsilon_3(\frac{1}{z} - \frac{y}{1+y})] ,$$

$$W_2 = \varepsilon_2\varepsilon_3[B_2\varepsilon_2 + \varepsilon_3B_3 + B_{22}(\varepsilon_2)^2 + B_{33}(\varepsilon_3)^2 + B_{23}\varepsilon_2\varepsilon_3 + B_{233}\varepsilon_2(\varepsilon_3)^2 + B_{223}(\varepsilon_2)^2\varepsilon_3]$$

avec

$$B_2 = [\frac{z^2}{(1+z)^2} - (1+y)^2] + 2(\frac{1+z}{z} - \frac{1}{1+y})] \quad , \quad B_3 = [\frac{(1+z)^2}{z^2} - \frac{1}{(1+y)^2}] + 2(\frac{z}{1+z} - y - 1),$$

$$B_{22} = [\frac{1}{(1+z)^2} - y^2] + 2(1+z - \frac{1}{y})] \quad , \quad B_{33} = [\frac{1}{z^2} - \frac{y^2}{(1+y)^2}] + 2(z - \frac{1+y}{y}) \quad ,$$

$$B_{223} = [(1+z)^2 - \frac{1}{y^2}] + 2(\frac{1}{1+z} - y) \ , \quad B_{233} = [z^2 - \frac{(1+y)^2}{y^2}] + 2(\frac{1}{z} - \frac{y}{1+y}) \ ,$$

$$B_{23} = \frac{4(y-z)(1-x)}{y\,z}$$

Cherchons $\tilde{W}_2(x, y)$. Les deux équations $f_2(y) = 0$ et $f_3(z) = 0$ donnent

$$\varepsilon_3 = \frac{N'_3}{D'} \ , \quad \varepsilon_2 = \frac{N'_2}{D'} \ , \text{ où}$$

$$D'(y,z) = z^2[(1+z)^3 - 1][(1+y)^3 - y^3] - (z^3-1)(z+1)^2(1+y)^2(1-y^3) \ ,$$

$$N'_2(y, z) = [(1+z)^3 - z^3][(1+y)^3 - y^3] - y^2(z^3-1)(z+1)^2[(1+y)^3-1] \ ,$$

$$N'_3(y, z) = y^2z^2[(1+y)^3 - 1][1+z)^3 - 1] - (1+y)^2(1-y^3)[1+z)^3 - z^3].$$

On peut vérifier que $D'(y, z)$ reste positif pour

$$z \geqslant 1, \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

puisque D' s'écrit :

$$\begin{aligned} D'(y, z) = {} & 1 + 2y + 2z + y^2 + 4yz + z^2 - y^3 - 2y^2z + 2yz^2 + 2z^3 - 2y^4 - 2y^3z + \\ & + y^2z^2 + 7yz^3 + z^4 - y^5 - 4y^4z - y^3z^2 + 8y^2z^3 + 5yz^4 - 2y^5z - 2y^4z^2 + \\ & + y^3z^3 + 7y^2z^4 + yz^5 - y^5z^2 + 2y^4z^3 + 2y^3z^4 + 2y^2z^5 + y^5z^3 + 4y^4z^4 + \\ & + y^3z^5 + 2y^5z^4 + 2y^4z^5 + y^5z^5. \end{aligned}$$

En comparant les fonctions $D(x, y)$, $N_3(x, y)$ et $N_2(x, y)$ avec les fonctions $D'(y, z)$, $N'_3(y, z)$ et $N_2(y, z)$, on constate que

$$D'(y, z) \equiv N_3(y, z), \quad N'_2(y, z) \equiv D(y, z) \text{ et } N'_3(y, z) \equiv N_2(y, z).$$

On en déduit que remplacer (x, y) par (y, z) revient à permuter circulairement (m_1, m_2, m_3).

D'autre part, si l'on compare les expressions de W_2 et W_1 ,

on constate que :

$$B_2(y,z) \equiv A_{33}(y,z), \quad B_3(y,z) \equiv A_{233}(y,z),$$

$$B_{22}(y,z) \equiv A_3(y,z), \quad B_{33}(y,z) \equiv A_{223}(y,z),$$

$$B_{223}(y,z) \equiv A_2(y,z), \quad B_{233}(y,z) \equiv A_{22}(y,z) \quad \text{et} \quad B_{23}(y,z) \equiv A_{23}(y,z).$$

Donc, si l'on pose $\frac{\tilde{W}_2}{\varepsilon_2\varepsilon_3}(D')^3 \equiv T_2(y,z)$ et $\frac{\tilde{W}_1}{\varepsilon_2\varepsilon_3}(D)^3 \equiv T_1(x,y)$

on a $T_2(y,z) \equiv T_1(y,z)$.

En effet on a

$$T_2(y,z) = B_2(y,z)\, N_2'(y,z).\,[D'(y,z)]^2 + B_3(y,z).\, N_3'(y,z).[D'(y,z)]^2 +$$

$$+ B_{22}(y,z).\,[N_2'(y,z)]^2.\, D'(y,z) + B_{33}(y,z).\,[N_3'(y,z)]^2.\, D'(y,z) +$$

$$+ B_{23}(y,z).\, D'(y,z).\, N_2'(y,z).\, N_3'(y,z) +$$

$$+ B_{233}\, N_2'(y,z)\,[N_3'(y,z)]^2 + B_{223}\,[N_2'(y,z)]^2.\, N_3'(y,z),$$

$$T_1(x,y) = A_2(x,y)\, N_2(x,y)\,[D(x,y)]^2 + A_3(x,y)\, N_3(x,y).\,[D(x,y)]^2 +$$

$$+ A_{22}(x,y).\,[N_2(x,y)]^2.\, D(x,y) + A_{33}(x,y)\,[N_3(x,y)]^2.\, D(x,y) +$$

$$+ A_{23}(x,y).\, N_2(x,y).\, N_3(x,y).\, D(x,y) +$$

$$+ A_{223}(x,y).[N_2(x,y)]^2.\,[N_3(x,y)] + A_{233}(x,y).\, N_2(x,y).\,[N_3(x,y)]^2.$$

On a déjà vu que W_2 s'annule pour $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ donc on doit pouvoir mettre $(1 - y\,z)$ en facteur dans $\tilde{W}_2(y,z)$.

Autrement $T_2(y,z)$ se met sous la forme

$$T_2(y,z) = \left[\frac{1}{y^2\, z^2 (1+y)^2\, (1+z)^2}\right] (1-y\,z).\, Q(y,z),$$

où $Q(y, z)$ est un polynôme par rapport aux deux variables y et z. Or on a déjà

montré que

$$\frac{\tilde{W}_1(x,y).\ x^2y^2(1+x)^2(1+y)^2.\ D^3}{\varepsilon_2\ \varepsilon_3\ (1-x\ y)} = P(x,\ y)$$

donc $T_1(x,\ y) = (1 - x\ y)\ P(x,\ y).\ \dfrac{1}{x^2\ y^2(1+x)^2(1+y)^2}$,

d'où l'identité :

$$Q(y,z) \equiv P(y,z).$$

Ainsi $\tilde{W}_2(y,z) = \varepsilon_2\ \varepsilon_3.\ (1 - y\ z)\ P(y,z).\ \dfrac{1}{z^2\ y^2(1+y)^2(1+z)^2}$

Pour démontrer que $P(y,z)$ est positif dans le domaine où varie (x,y) on effectue les changements de variables :

$$Z = \frac{1}{z}\ ,\ Y = y \qquad \text{puis} \qquad x = Z - Y\ ,\ y = Y,$$

qui permettent de minorer $P(y,z)$ par un polynôme positif dans le domaine considéré.

A.2.4. MINORATION DE $P(x,\ y)$ DANS LE DOMAINE D.

Le polynôme $P(x,y)$ est de degré 37 par rapport à l'ensemble des deux variables x et y. Il s'écrit

$$P(x,y) = \sum_{i=1}^{19}\sum_{j=1}^{19} P_{ij}\ x^i\ y^j \equiv x\ y \sum_{j=o}^{18} P_j(x)\ y^j \equiv x\ y \sum_{i=o}^{18} Q_i(y)\ x^i\ ,$$

où $P_j(x)$ et $Q_i(y)$ sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 18, pour $i,\ j = 0,1,\ldots,\ 18$. On constate aussi que $P_{ij} = P_{20-j,20-i}$, $\forall i,\ j = 0,1,..\ 18$, ce qui entraîne que $P(x,y) = x^{19}y^{19}P(\frac{1}{y},\frac{1}{x})$.

En effet on trouve :

$$P_o(x) = -\ x - 8x^2 - 28x^3 - 53x^4 - 46x^5 + 28x^6 + 137x^7 + 178x^8 + 83x^9 + 0 +$$

$$- 83x^{10} - 178x^{11} - 137x^{12} - 28x^{13} + 46x^{14} + 53x^{15} + 28x^{16} + 8x^{17} + 18\ ,$$

$$P_1(x) = -1 - 20x - 122x^2 - 367x^3 - 598x^4 - 380x^5 + 541x^6 + 1642x^7 + 1825x^8 +$$
$$+ 587x^9 - 1168x^{10} - 1955x^{11} - 1304x^{12} - 110x^{13} + 565x^{14} + 536x^{15} + 254x^{16}$$
$$+ 67x^{17} + 8x^{18} ,$$

$$P_2(x) = -11 - 166x - 925x^2 - 2645x^3 - 4121x^4 - 2479x^5 + 3470x^6 + 10001x^7 +$$
$$+ 10769x^8 + 3610x^9 - 6005x^{10} - 10195x^{11} - 6835x^{12} - 763x^{13} +$$
$$+ 2576x^{14} + 2383x^{15} + 1054x^{16} + 254x^{17} + 28x^{18} ,$$

$$P_3(x) = -55 - 772 - 4253x^2 - 12350x^3 - 20105x^4 - 14662x^5 + 10087x^6 +$$
$$+ 39194x^7 + 46702x^8 + 23020x^9 - 12770x^{10} - 32278x^{11} - 25997x^{12} +$$
$$- 7930x^{13} + 3955x^{14} + 5242x^{15} + 2383x^{16} + 536x^{17} + 53x^{18} ,$$

$$P_4(x) = -162 - 2262x - 12769x^2 - 38806x^3 - 68253x^4 - 61531x^5 + 7407x^6 +$$
$$+ 101621x^7 + 143610x^8 + 96027x^9 + 1909x^{10} - 63978x^{11} - 68467x^{12} -$$
$$- 35591x^{13} - 5897x^{14} + 3955x^{15} + 2576x^{16} + 565x^{17} + 46x^{18} ,$$

$$P_5(x) = -306 - 4413x - 26100x^2 - 84259x^3 - 161125x^4 - 171441x^5 - 39057x^6 +$$
$$+ 178126x^7 + 310259x^8 + 252869x^9 + 74000x^{10} - 77017x^{11} - 121289x^{12} - 85825x^7,$$

$$P_6(x) = -378 - 5840x - 36936x^2 - 127839x^3 - 264104x^4 - 312527x^5 - 119115x^6 +$$
$$+ 259165x^7 + 537667x^8 + 503312x^9 + 237615x^{10} - 19505x^{11} - 131134x^{12}$$
$$- 121289x^{13} - 68467x^{14} - 25997x^{15} - 6835x^{16} - 1304x^{17} - 137x^{18} ,$$

$$P_7(x) = -297 - 5181 - 35922x^2 - 134228x^3 - 294791x^4 - 358361x^5 -$$
$$- 98784x^6 + 450694x^7 + 900768x^8 + 910710x^9 + 561330x^{10} +$$
$$+ 186064x^{11} - 19505x^{12} - 77017x^{13} - 63978x^{14} - 32278x^{15} - 10195x^{16}$$
$$- 1955x^{17} - 178x^{18} ,$$

$$P_8(x) = -135 - 2927x - 23067x^2 - 93626x^3 - 211150x^4 - 219530x^5 +$$
$$+ 136463x^6 + 848067x^7 + 1456094x^8 + 1505560x^9 + 1067295x^{10} +$$
$$+ 561330x^{11} + 237615x^{12} + 74000x^{13} + 1909x^{14} - 12770x^{15} - 6005x^{16}$$
$$- 1168x^{17} - 83x^{18} ,$$

$$P_9(x) = -27 - 933x - 8955x^2 - 39737x^3 - 82738x^4 - 5357x^5 + 428356x^6 +$$
$$1227896x^7 + 1925964x^8 + 2002137x^9 + 1505560x^{10} + 910710x^{11} +$$
$$+ 503312x^{12} + 252869x^{13} + 96027x^{14} + 23020x^{15} + 3610x^{16} + 587x^{17} + 83x^{18}$$

$$P_{10}(x) = -123x - 1755x^2 - 8453x^3 - 6418x^4 + 99688x^5 + 493848x^6 + 1206037x^7$$
$$+ 1848674x^8 + 1925964x^9 + 1456094x^{10} + 900768x^{11} + 537667x^{12} + 310259x^{13}$$
$$+ 143610x^{14} + 46702x^{15} + 10769x^{16} + 1825x^{17} + 178x^{18} ,$$

$$P_{11}(x) = -108x^2 - 372x^3 + 7838x^4 + 76550x^5 + 320160x^6 + 779188x^7 + 1206037x^8$$
$$+ 1227896x^9 + 848067x^{10} + 450694x^{11} + 259165x^{12} + 178126x^{13} +$$
$$+ 101621x^{14} + 39194x^{15} + 10001x^{16} + 1642x^{17} + 137x^{18} ,$$

$$P_{12}(x) = 84x^3 + 2898x^4 + 27226x^5 + 123614x^6 + 320160x^7 + 493848x^8 +$$
$$+ 428356x^9 + 136463x^{10} - 98784x^{11} - 119115x^{12} - 39057x^{13} + 7407x^{14}$$
$$+ 10087x^{15} + 3470x^{16} + 541x^{17} + 28x^{18}$$

$$P_{13} = 318x^4 + 4770x^5 + 27226x^6 + 76550x^7 + 99688x^8 - 5357x^9 - 219530x^{10}$$
$$- 358361x^{11} - 312527x^{12} - 171441x^{13} - 61531x^{14} - 14662x^{15} - 2479x^{16} -$$
$$- 380x^{17} - 46x^{18} ,$$

$$P_{14}(x) = 318x^5 + 2898x^6 + 7838x^7 - 6418x^8 - 82738x^9 - 211150x^{10} - 294791x^{11} -$$

$$- 264104x^{12} - 161125x^{13} - 68253x^{14} - 20105x^{15} - 4121x^{16} - 598x^{17} - 53x^{18} ,$$

$$P_{15}(x) = 84x^6 - 372x^7 - 8453x^8 - 39737x^9 - 93626x^{10} - 134228x^{11} - 127839x^{12}$$

$$- 84259x^{13} - 38806x^{14} - 12350x^{15} - 2645x^{16} - 367x^{17} - 28x^{18} ,$$

$$P_{16}(x) = - 108x^7 - 1755x^8 - 8955x^9 - 23067x^{10} - 35922x^{11} - 36936x^{12} -$$

$$- 26100x^{13} - 12769x^{14} - 4253x^{15} - 925x^{16} - 122x^{17} - 8x^{18} ,$$

$$P_{17}(x) = - 123x^8 - 933x^9 - 2927x^{10} - 5181x^{11} - 5840x^{12} - 4413x^{13} - 2262x^{14} -$$

$$- 772x^{15} - 166x^{16} - 20x^{17} - x^{18} ,$$

$$P_{18}(x) = - 27x^9 - 135x^{10} - 297x^{11} - 378x^{12} - 306x^{13} - 162x^{14} - 55x^{15} - 11x^{16} - x^{17} .$$

On constate que $P_j(-1) = 0$ et $Q_j(-1) = 0$ pour $i,j = 0, 1, .. 18$, donc on peut mettre $(1 + x)(1 + y)$ en facteur. Soit alors $R(x,y)$ le nouveau polynôme tel que

$$P(x,y) \equiv x\, y\, (1 + x)\, (1 + y)\, R(x, y),$$

avec $$R(x, y) \equiv \sum_{j=o}^{17} R_j(x)\, y^j \equiv \sum_{i=o}^{17} S_i(y)\, x^i \equiv \sum_{j=o}^{17} \sum_{i=o}^{17} R_{ij}\, x^i\, y^j$$

[$R(x,y)$ est de degré 33 par rapport aux variables x et y] .

On peut démontrer que

$$R_{kj} = (-i)^{j+k} \sum_{\ell=o}^{k} \sum_{m=o}^{j} (-1)^{\ell+m} P_{\ell m} \quad \text{pour } i, k = 0,...17,$$

Avec cette formule on a donc le nouveau polynôme $R(x, y)$ qui sera tel que : $R_{kj} = R_{17-j,17-k}$ pour $j, K = 0,1,...,17$ ou $R(x,y) = (x\, y)^{17} R(\frac{1}{y}, \frac{1}{x})$.

On a :

$$R_o(x) = - x - 7x^2 - 21x^3 - 32x^4 - 14x^5 + 42x^6 + 95x^7 + 83x^8 + 0 - 83x^{10}$$

$$- 95x^{11} - 42x^{12} + 14x^{13} + 32x^{14} + 21x^{15} + 7x^{16} + x^{17} ,$$

$$R_1(x) = -1 - 18x - 96x^2 - 243x^3 - 302x^4 - 32x^5 + 545x^6 + 960x^7 + 687x^8 - 183x^9$$
$$- 902x^{10} - 875x^{11} - 292x^{12} + 210x^{13} + 309x^{14} + 174x^{15} + 52x^{16} + 7x^{17} ,$$

$$R_2(x) = -10 - 137x - 674x^2 - 1632x^3 - 1944x^4 - 201x^5 + 3158x^6 + 5338x^7 + 3784x^8$$
$$- 678x^9 - 4242x^{10} - 4176x^{11} - 1492x^{12} + 811x^{13} + 1246x^{14} + 654x^{15} + 174x^{16} + 21x^{17},$$

$$R_3(x) = -45 - 580x - 2862x^2 - 7182x^3 - 9347x^4 - 3170x^5 + 10300x^6 + 20398x^7 +$$
$$+ 17182x^8 + 2732x^9 - 10582x^{10} - 13278x^{11} - 7051x^{12} - 198x^{13} + 2096x^{14} +$$
$$+ 1246x^{15} + 309x^{16} + 32x^{17} ,$$

$$R_4(x) = -117 - 1520x - 7807x^2 - 20955x^3 - 30769x^4 - 18245x^5 + 18522x^6 +$$
$$+ 52401x^7 + 53629x^8 + 22484x^9 - 12725x^{10} - 27393x^{11} - 20745x^{12} - 7597x^{13}$$
$$- 198x^{14} + 811x^{15} + 210x^{16} + 14x^{17} ,$$

$$R_5(x) = -189 - 2587x - 14186x^2 - 41311x^3 - 68090x^4 - 54337x^5 + 15003x^6 +$$
$$+ 92200x^7 + 112029x^8 + 64727x^9 - 486x^{10} - 36413x^{11} - 36738x^{12} - 20745x^{13}$$
$$- 7051x^{14} - 1492x^{15} - 292x^{16} - 42x^{17} ,$$

$$R_6(x) = -189 - 2875x - 17288x^2 - 55054x^3 - 99649x^4 - 90451x^5 + 10670x^6 +$$
$$+ 141292x^7 + 192146x^8 + 134410x^9 + 38964x^{10} - 21570x^{11} - 36413x^{12} -$$
$$- 273393x^{13} - 13278x^{14} - 4176x^{15} - 875x^{16} - 95x^{17} ,$$

$$R_7(x) = -108 - 2009x - 13750x^2 - 48136x^3 - 91952x^4 - 76309x^5 + 57306x^6 +$$
$$+ 241426x^7 + 325904x^8 + 258250x^9 + 129706x^{10} + 38964x^{11} - 486x^{12} -$$
$$- 12725x^{13} - 10582x^{14} - 4242x^{15} - 902x^{16} - 83x^{17} ,$$

$$R_8(x) = -27 - 783x - 6525x^2 - 25215x^3 - 45847x^4 - 5422x^5 + 160888x^6 + 388447x^7$$
$$+ 500317x^8 + 421089x^9 + 258250x^{10} + 134410x^{11} + 64727x^{12} + 22484x^{13} +$$
$$+ 2732x^{14} - 678x^{15} - 183x^{16} + 0 ,$$

$$R_9(x) = -123x - 1524x^2 - 6473x^3 - 5203x^4 + 51115x^5 + 221775x^6 + 456786x^7 +$$
$$+ 580414x^8 + 500317x^9 + 325904x^{10} + 192146x^{11} + 112029x^{12} + 53629x^{13} +$$
$$+ 17182x^{14} + 3784x^{15} + 687x^{16} + 83x^{17} ,$$

$$R_{10}(x) = -108x^2 - 348x^3 + 5606x^4 + 48170x^5 + 172788x^6 + 354688x^7 + 456786x^8 +$$
$$+ 388447x^9 + 241426x^{10} + 141292x^{11} + 92200x^{12} + 52401x^{13} + 20398x^{14} +$$
$$+ 5338x^{15} + 960x^{16} + 95x^{17} ,$$

$$R_{11}(x) = 84x^3 + 2496x^4 + 20278x^5 + 78924x^6 + 172788x^7 + 221775x^8 + 160888x^9 +$$
$$+ 57306x^{10} + 10670x^{11} + 15003x^{12} + 18522x^{13} + 10300x^{14} + 3158x^{15} + 545x^{16} +$$
$$+ 42x^{17} ,$$

$$R_{12}(x) = 318x^4 + 4134x^5 + 20278x^6 + 48170x^7 + 51115x^8 - 5422x^9 - 76309x^{10} -$$
$$- 90451x^{11} - 54337x^{12} - 18245x^{13} - 3170x^{14} - 201x^{15} - 32x^{16} - 14x^{17} ,$$

$$R_{13}(x) = 318x^5 + 2496x^6 + 5606x^7 - 5203x^8 - 45847x^9 - 91952x^{10} - 99649x^{11}$$
$$- 6809x^{12} - 30769x^{13} - 9347x^{14} - 1944x^{15} - 302x^{16} - 32x^{17}$$

$$R_{14}(x) = 84x^6 - 348x^7 - 6473x^8 - 25215x^9 - 48136x^{10} - 55054x^{11} - 41311x^{12}$$
$$- 20955x^{13} - 7182x^{14} - 1632x^{15} - 243x^{16} - 21x^{17} ,$$

$$R_{15}(x) = -108x^7 - 1524x^8 - 6525x^9 - 13750x^{10} - 17288x^{11} - 14186x^{12} -$$
$$- 7807x^{13} - 2862x^{14} - 674x^{15} - 96x^{16} - 7x^{17} ,$$

$$R_{16}(x) = - 123x^8 - 783x^9 - 2009x^{10} - 2875x^{11} - 2587x^{12} - 1520x^{13} -$$

$$- 580x^{14} - 137x^{15} - 18x^{16} - x^{17} ,$$

$$R_{17}(x) = - 27x^9 - 108x^{10} - 189x^{11} - 189x^{12} - 117x^{13} - 45x^{14} - 10x^{15} - x^{16} + 0 .$$

On a déjà vu que $(x, y) \in D$ où D est défini par

$1 \leqslant x \leqslant x_o$, $x - 1 < y^2$, $x\,y < 1$ et $0 < y \leqslant 1$, où $x_o = 1{,}431831618$

On peut montrer que $R(x, y)$ reste positif sur le bord ∂D de D et ne s'annule sur ∂D qu'au point $x = 1$, $y = 0$. En effet on a :

$$R(1,y) = 148176y^6 + 790272y^7 + 1868664y^8 + 2502528y^9 + 1980139y^{10} +$$

$$+ 772779y^{11} - 124166y^{12} - 344715y^{13} - 206486y^{14} - 64827y^{15} - 10633y^{16}$$

$$- 686y^{17} > 0 \qquad \text{pour} \quad 1 \geqslant y \geqslant 0 ,$$

$$R(x_o,y) = 5221{,}287293234524 + 4856993186809063y + 128164{,}2591080392y^2$$

$$- 288161{,}0630939359y^3 - 2007683{,}08963794y^4 - 4231934{,}670820152y^5$$

$$- 1105423{,}416851223y^6 + 17219262{,}51042888y^7 + 49085743{,}66994252y^8$$

$$+ 70198433{,}58603221y^9 + 57170896{,}12196861y^{10} + 19089216{,}78867604y^{11} -$$

$$- 12410089{,}61059036y^{12} - 19938925{,}54258204y^{13} - 12183497{,}19955288y^{14} -$$

$$- 4086799{,}536146535y^{15} - 721732{,}6674514642y^{16} - 50209{,}70968203618y^{17}$$

$$y^{17}\, R(\tfrac{1}{y},y) = 1 + 14y + 94y^2 + 412y^3 + 1300y^4 + 2828y^5 + 2944y^6 - 5296y^7$$

$$- 31855y^8 - 76730y^9 - 112480y^{10} - 83240y^{11} + 68528y^{12} + 361624y^{13}$$

$$+ 746938y^{14} + 1111508y^{15} + 1326845y^{16} + 1318866y^{17} + 1106928y^{18} +$$

$$+ 784016y^{19} + 461880y^{20} + 219856y^{21} + 80800y^{22} + 21376y^{23} + 3600y^{24} + 288y^{25}$$

$$+ 0$$

$$R(1+y^2,y) = 175152y^6 + 823488y^7 + 3003000y^8 + 8246448y^9 + 19226633y^{10} + 39000327y^{11} +$$

$$+ 70458056y^{12} + 115451595y^{13} + 172812711y^{14} + 238710909y^{15} +$$

$$+ 305342348y^{16} + 363068454y^{17} + 402012151y^{18} + 413968578y^{19} + 395714674y^{20} +$$

$$+ 348441464y^{21} + 278910762y^{22} + 197158304y^{23} + 114114434y^{24} + 40074032y^{25} -$$

$$- 18234333y^{26} - 57438961y^{27} - 77968832y^{28} - 83022001y^{29} - 77007373y^{30} -$$

$$- 64764705y^{31} - 50247254y^{32} - 36316152y^{33} - 24595087y^{34} - 15637224y^{35} -$$

$$- 9357384y^{36} - 5264892y^{37} - 2784444y^{38} - 1382494y^{39} - 641538y^{40} -$$

$$- 278142y^{41} - 111629y^{42} - 41395y^{43} - 14026y^{44} - 4281y^{45} - 1175y^{46} - 273y^{47} -$$

$$- 56y^{48} - 8y^{49} - y^{50}$$

Ce calcul a été fait suivant les formules :

$$R(1, y) = \sum_{j=o}^{17} \sum_{k=o}^{17} [R_{k\ell}]\ y^{\ell} ,$$

$$R(x_o, y) = \sum_{j=o}^{17} \sum_{k=o}^{17} [R_{k\ell}\ x_o^k]\ y^{\ell} ,$$

$$y^{17}\ R(\frac{1}{y}, y) = \sum_{\ell=1}^{35} \left[\sum_{k=Sup(1,19-\ell)}^{Inf(18,36-\ell)} R_{k,k+\ell-18} \right] y^{\ell-1} ,$$

$R(1 + y^2, y)$, donné ci-dessus.

On en déduit qu'il convient d'effectuer le changement de variables :

$$X = x - 1 \ , \ Y = y$$

On a

$$R(x,y) = \tilde{R}(X,Y) = \sum_{\ell=o}^{17} \sum_{k=o}^{17} \tilde{R}_k\ X^k\ Y^{\ell} \equiv \sum_{\ell=o}^{17} \sum_{k=o}^{17} R_{k\ell}\ x^k\ y^{\ell} ;$$

En posant $\tilde{R}_{\ell}(X) = \sum_{k=o}^{17} \tilde{R}_{k\ell}\ X^k$, On a l'identité $\tilde{R}_{k\ell} = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} R_{\ell}(1) \right]$,

où

$$R_\ell(x) = \sum_{k=o}^{17} R_{k\ell}\, x^k .$$

On trouve ainsi les polynômes $\tilde{R}_\ell(X)$ pour $\ell = 0, 1, \ldots 17$:

$$\tilde{R}_0(X) = 3456X^3 + 25920X^4 + 90720X^5 + 196560X^6 + 294696X^7 + 323532X^8 +$$
$$+ 268274X^9 + 170703X^{10} + 83758X^{11} + 31535X^{12} + 8967X^{13} +$$
$$+ 1867X^{14} + 269X^{15} + 24X^{16} + X^{17} ,$$

$$\tilde{R}_1(X) = 34560X^3 + 251904X^4 + 857856X^5 + 1809856X^6 + 2643168X^7 +$$
$$+ 2826832X^8 + 2283120X^9 + 1414644X^{10} + 675755X^{11} + 247683X^{12} +$$
$$+ 68586X^{13} + 13919X^{14} + 1958X^{15} + 171X^{16} + 7X^{17} ,$$

$$\tilde{R}_2(X) = - 28224X^2 - 38016X^3 + 489744X^4 + 2469552X^5 + 5950756X^6 +$$
$$+ 9217824X^7 + 10123087X^8 + 8247679X^9 + 5096304X^{10} +$$
$$+ 2407360X^{11} + 866635X^{12} + 234345X^{13} + 46215X^{14} + 6294X^{15} +$$
$$+ 531X^{16} + 21X^{17} ,$$

$$\tilde{R}_3(X = - 274176X^2 - 1508544X^3 - 3408144X^4 - 3361248X^5 + 1053144X^6 +$$
$$+ 8049244X^7 + 12696687X^8 + 12219134X^9 + 8258008X^{10} + 4096144X^{11}$$
$$+ 1508437X^{12} + 409176X^{13} + 79626X^{14} + 10542X^{15} + 853X^{16} + 32X^{17} ,$$

$$\tilde{R}_4(X) = 51744X - 695184X^2 - 5589560X^3 - 17511348X^4 - 31997180X^5 +$$
$$- 38437646X^6 - 31528404X^7 - 17215368X^8 - 5201737X^9 + 335227X^{10} +$$
$$+ 1256588X^{11} + 700313X^{12} + 225706X^{13} + 46687X^{14} + 6075X^{15} +$$
$$+ 448X^{16} + 14X^{17} ,$$

$$\tilde{R}_5(X) = 272832X - 368256X^2 - 9138688X^3 - 35752464X^4 - 76471412X^5 +$$
$$- 108734656X^6 - 111408270X^7 - 85773801X^8 - 50802945X^9 +$$
$$- 23452486X^{10} - 8493771X^{11} - 2418260X^{12} - 539599X^{13} - 93031X^{14} +$$
$$- 11876X^{15} - 10006X^{16} - 42X^{17} ,$$

$$\tilde{R}_6(X) = 148176 + 1841616X + 5923596X^2 + 3834576X^3 - 22416962X^4 +$$
$$- 77136706X^5 - 133722092X^6 - 156070900X^7 - 134000154X^8 +$$
$$- 88062041X^9 - 45122328X^{10} - 18126332X^{11} - 5681260X^{12} +$$
$$- 1367865X^{13} - 245518X^{14} - 31096X^{15} - 2490X^{16} - 95X^{17} ,$$

$$\tilde{R}_7(X) = 790272 + 7368816X + 28306152X^2 + 60264612X^3 +$$
$$+ 76724126X^4 + 51675460X^5 - 5739316X^6 - 57200272X^7 +$$
$$- 74403147X^8 - 60259949X^9 - 35281824X^{10} - 15568740X^{11} +$$
$$- 5214227X^{12} - 1308943X^{13} - 238892X^{14} - 29962X^{15} - 2313X^{16} - 83X^{17} ,$$

$$\tilde{R}_8(X) = 1868664 + 16331994X + 64522311X^2 + 154361302X^3 + 252195339X^4$$
$$+ 300203457X^5 + 270325923X^6 + 187661589X^7 + 100551847X^8 +$$
$$+ 40694693X^9 + 11672400X^{10} + 1934520X^{11} - 35919X^{12} - 112938X^{13} +$$
$$- 29398X^{14} - 3606X^{15} - 183X^{16} ,$$

$$\tilde{R}_9(X) = 2502528 + 21610372X + 86506420X^2 + 214650659X^3 +$$
$$+ 372692761X^4 + 484440284X^5 + 491516119X^6 + 399174630X^7 +$$
$$+ 262734921X^8 + 140532796X^9 + 60849532X^{10} + 21166988X^{11} +$$
$$+ 5858432X^{12} + 1273757X^{13} + 212822X^{14} + 26064X^{15} + 2098X^{16} + 83X^{17} ,$$

$$\tilde{R}_{10}(X) = 1980139 + 17070571X + 68681088X^2 + 172594028X^3 + 306281301X^4 +$$
$$+ 411284377X^5 + 435999724X^6 + 37371899X^7 + 26147912X^8 +$$
$$+ 149169818X^9 + 68851176X^{10} + 25415212X^{11} + 7393481X^{12} +$$
$$+ 1662163X^{13} + 280268X^{14} + 33618X^{15} + 2575X^{16} + 95X^{17} ,$$

$$\tilde{R}_{11}(X) = 772779 + 6329134X + 23972620X^2 + 56527972X^3 +$$
$$+ 95069369X^4 + 124649030X^5 + 135243898X^6 + 124525850X^7 +$$
$$+ 96561186X^8 + 61546898X^9 + 31437116X^{10} + 12595644X^{11} +$$
$$+ 3881775X^{12} + 899472X^{13} + 151630X^{14} + 17590X^{15} + 1259X^{16} + 42X^{17} ,$$

$$\tilde{R}_{12}(X) = - 124166 - 1854503X - 11138365X^2 - 37985366X^3 - 84448819X^4$$
$$- 131394160X^5 - 148950855X^6 - 125898563X^7 - 80299258X^8 +$$
$$- 388801397X^9 - 14180883X^{10} - 3906890X^{11} - 816319X^{12} +$$
$$- 134970X^{13} - 19545X^{14} - 2617X^{15} - 270X^{16} - 14X^{17} ,$$

$$\tilde{R}_{13}(X) = - 344715 - 3796569X - 19245576X^2 - 59626973X^3 +$$
$$- 126439874X^4 - 194739473X^5 - 225630825X^6 - 200997564X^7$$
$$- 139545345X^8 - 76100911X^9 - 32716896X^{10} - 11087747X^{11} +$$
$$- 2950840X^{12} - 611027X^{13} - 96507X^{14} - 11128X^{15} - 846X^{16} - 32X^{17} ,$$

$$\tilde{R}_{14}(X) = - 206486 - 2265025X - 11507076X^2 - 35939996X^3 - 77258372X^4$$
$$- 121269631X^5 - 143916854X^6 - 131919976X^7 - 94608854X^8 +$$
$$- 534427440X^9 - 23817816X^{10} - 8348524X^{11} - 2282056X^{12} +$$
$$- 478923X^{13} - 75102X^{14} - 8376X^{15} - 600X^{16} - 21X^{17} ,$$

$$\tilde{R}_{15}(X) = - 64827 - 722897X - 3738336X^2 - 11900424X^3 - 26105477X^4 +$$
$$- 41861129X^5 - 50794116X^6 - 47628314X^7 - 34938664X^8 +$$
$$- 20169294X^9 - 9166784X^{10} - 3264204X^{11} - 900825X^{12} - 189065X^{13} +$$
$$- 29252X^{14} - 3162X^{15} - 215X^{16} - 7X^{17} ,$$

$$\tilde{R}_{16}(X) = - 10633 - 121030X - 638925X^2 - 2076190X^3 - 4647998X^4 +$$
$$- 7602591X^5 - 9402009X^6 - 8973749X^7 - 6688060X^8 -$$
$$- 3912013X^9 - 1794679X^{10} - 641604X^{11} - 176410X^{12} -$$
$$- 36485X^{13} - 5475X^{14} - 561X^{15} - 35X^{16} - X^{17} ,$$

$$\tilde{R}_{17}(X) = - 686 - 7987X - 43092X^2 - 142945X^3 - 326177X^4 -$$
$$- 542691X^5 - 680867X^6 - 656992X^7 - 492777X^8 -$$
$$- 288317X^9 - 131206X^{10} - 45981X^{11} - 12175X^{12} - 2357X^{13}$$
$$- 315X^{14} - 26X^{15} - X^{16} .$$

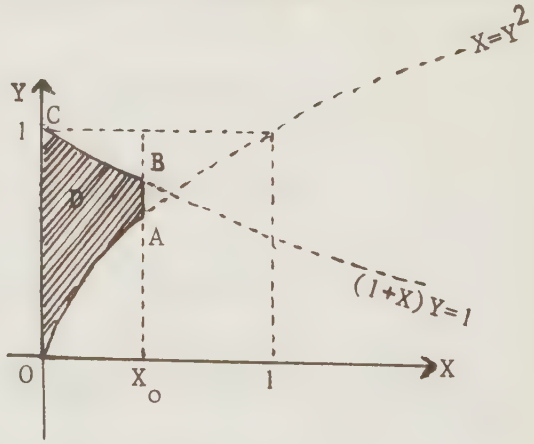
Nous avons donc à minorer le polynôme $\tilde{R}(X, Y)$ dans le domaine D hachuré O A B C O de la figure, défini par

$$0 \leqslant Y \leqslant 1 \quad 0 \leqslant X \leqslant X_o = 1 - x_o = 0{,}431831618...$$
$$X \leqslant \left(\frac{1}{Y} - 1\right), \quad X \leqslant Y^2$$

où $X_A = X_B = X_O$,

$Y_A = 0{,}657138964....$

$Y_B + 0{,}698406145....$



Observons que les polynômes $\tilde{R}_{12}, \tilde{R}_{13}, ..., \tilde{R}_{17}$ sont négatifs dans le domaine D puisque leurs coefficients sont tous négatifs, alors que les polynômes $\tilde{R}_7, \tilde{R}_8, ..., \tilde{R}_{11}$ sont positifs ainsi que $\tilde{R}_o$ et $\tilde{R}_1$.

En utilisant la double inégalité $0 \leqslant Y \leqslant 1$, qui entraîne que

$$- Y^p \geqslant - Y^q \qquad \forall\ p \geqslant q > 0 \ ,$$

on arrive à minorer $\sum_{\ell=10}^{17} Y^\ell \tilde{R}_\ell(X)$ par $Y^{10} \hat{R}_{10}(X) > 0$, où

$$\hat{R}_{10}(X) = 2001405 + 14631694X + 46342338X^2 + 81450106X^3 + 82123953X^4 +$$

$$+ 38523732X^5 - 8131904X^6 - 17830318X^7 + 1467348X^8 + 18002040X^9 +$$

$$+ 18480028X^{10} + 10715906X^{11} + 4136631X^{12} + 1108808X^{13} + 205702X^{14} +$$

$$+ 25338X^{15} + 1867X^{16} + 62X^{17} \ .$$

D'autre part en utilisant la double inégalité :

$$0 < X < Y^2 \ ,$$

qui entraîne que

$$- Y^{p-2} X^{q+1} \geqslant - Y^p X^q \ ,$$

on peut éliminer les termes négatifs des polynômes : $\tilde{R}_2, \tilde{R}_3, \ldots \tilde{R}_8$.

D'une façon précise on a d'abord :

$$\sum_{\ell=2}^{9} Y^9 \tilde{R}_9(x) > \sum_{\ell=2}^{9} Y^9 \hat{R}_9(x) \qquad \text{avec}$$

$$\hat{R}_2(X) = 489744X^4 + 2469552X^5 + 5950756X^6 + 9217824X^7 + 10123087X^8 +$$

$$+ 8247679X^9 + 5096304X^{10} + 2407360X^{11} + 866635X^{12} + 234345X^{13} + 46216X^{14}$$

$$+ 6294X^{15} + 531X^{16} + 21X^{17} \ ,$$

$$\hat{R}_3(X) = 1053144X^6 + 8049244X^7 + 12696687X^8 + 12219134X^9 + 8258008X^{10} +$$

$$+ 4096144X^{11} + 1508437X^{12} + 409176X^{13} + 79626X^{14} + 10542X^{15} + 853X^{16} + 32X^{17}$$

$$\hat{R}_4(X) = 335227X^{10} + 1256588X^{11} + 700313X^{12} + 225706X^{13} + 46687X^{14} + 6075X^{15} +$$

$$+ 448X^{16} + 14X^{17} \ ,$$

$$\hat{R}_5(X) = 0 ,$$

$$\hat{R}_6(X) = 148176 - 45122328X^{10} - 18126332X^{11} - 5681260X^{12} - 1367865X^{13} -$$
$$- 245518X^{14} - 31096X^{15} - 2490X^{16} - 95X^{17} ,$$

$$\hat{R}_7(X) = 788928 + 5492016X + 15759320X^2 + 21150900X^3 + 252714X^4 - 83X^{17} ,$$

$$\hat{R}_8(X) = 1868664 + 16331994X + 50845539X^2 + 99947160X^3 + 136620987 +$$
$$+ 134952961X^5 + 97039655X^6 + 48459698X^7 + 12489806X^8 +$$
$$+ 40694693X^9 + 11672400X^{10} + 1934520X^{11} - 35919X^{12} - 112938X^{13} - 29398X^{14} -$$
$$- 3606X^{15} - 183X^{16} ,$$

$$\hat{R}_9(X) = 2502528 + 21610372X + 86506420X^2 + 214650659X^3 + 315633565X^4 +$$
$$+ 367292698X^5 + 348542046X^6 + 273968538X^7 + 179022504X^8 + 96757201X^9 +$$
$$+ 42862532X^{10} + 15413162X^{11} + 4456458X^{12} + 102989X^{13} + 181854X^{14} +$$
$$+ 23709X^{15} + 2098X^{16} + 83X^{17} .$$

Or $Y^2 \hat{R}_8(X) + \hat{R}_6(X) > Y^2 \hat{\hat{R}}_8(X) + \hat{\hat{R}}_6(X)$, où

$$\hat{\hat{R}}_6(X) = 148176 ,$$

$$\hat{\hat{R}}_8(X) = 1868664 + 16331994X + 50845539X^2 + 99947160X^3 + 136620987X^4 +$$
$$+ 134952961X^5 + 97039655X^6 + 48459698X^7 + 12489806X^8 +$$
$$- 4427635X^9 - 6453932X^{10} - 3746740X^{11} - 1403784X^{12} - 358456X^{13}$$
$$- 60494X^{14} - 6096X^{15} - 278X^{16} .$$

Or, en tenant compte du fait que $X < X_o = 0,431831618...$,
on peut démontrer que :

$$\hat{\hat{R}}_8(X) > 1868664 + 16331994X + 50845539X^2 + 99947160X^3 + 136620987X^4 +$$

$$+ 134952961X^5 + 97039655X^6 + 48459698X^7 + 9017970,359X^8.$$

Ceci achève la minoration de $R(X, Y)$ par un polynôme positif dans le domaine D.

A.2.5. MINORATION DE $P(y, z)$ DANS LE DOMAINE D' :

On a vu que $P(x,y) = x\,y(1+x)(1+y)\,R(x,y)$; donc minorer $P(y,z)$ dans D' revient à minorer $R(y, z)$ dans le même domaine par un polynôme positif. Ainsi on a :

$$R(y,z) \equiv \sum_{j=0}^{17} R_j(y)\, z^j \equiv \sum_{i=0}^{17} S_i(z)\, y^i \equiv \sum_{j=0}^{17} \sum_{i=0}^{17} R_{ij}\, y^i\, z^j ,$$

avec la propriété :

$$R_{kj} = R_{17-j\ 17-k} \quad , \quad \text{pour} \quad j, k = 0,1,2,\ldots 17,$$

où

$$R(y, z) \equiv (y\,z)^{17}\ R\left(\frac{1}{z}\ ,\ \frac{1}{y}\right) .$$

Remarquons en particulier que

$$R_{17}(y) = -\,27\,y^9 - 108x^{10} \ldots\ldots .$$

Cela entraîne que le polynôme $R(y, z)$ s'annule au point E à l'infini E $(y = 0, z = \infty)$ sur la frontière du domaine D'.

D'autre part $R(y, z)$ reste positif strictement sur le reste de la frontière de D'. En effet on a :

$$R(y, 1) = y^{17}\ R\left(1, \frac{1}{y}\right) = -\,686 - 10633y - 64827y^2 - 206486y^3 - 344715y^4 -$$

$$- 124166y^5 + 772779y^6 + 1980139y^7 + 2502528y^8 + 1868664y^9 + 790272y^{10}$$

$$+ 148176y^{11} ,$$

et l'on peut montrer que $R(y, 1) \geqslant 0$ pour $y \geqslant 0,5722246026$

donc à fortiori $R(y, 1) \geqslant 0$ pour $y \geqslant a_o = 0,6976280506$;

$$(y+y^2)^7\, R\left(y,\frac{1}{y+y^2}\right) = 288 + 4896y + 39184y^2 + 199808y^3 + 732096y^4 + 2051008y^5 +$$

$$+ 4562592y^6 + 8312096y^7 + 12973184y^8 + 19052864y^9 + 30533912y^{10} +$$

$$+ 57258400y^{11} + 113642184y^{12} + 211285920y^{13} + 347529832y^{14} +$$

$$+ 497152240y^{15} + 615346966y^{16} + 654348570y^{17} + 586639465y^{18} +$$

$$+ 421479916y^{19} + 203931796y^{20} - 4219290y^{21} - 151098835y^{22} -$$

$$- 214204930y^{23} - 203437106y^{24} - 149087213y^{25} - 84239533y^{26} -$$

$$- 31672235y^{27} + 91320y^{28} + 13297154y^{29} + 14812668y^{30} + 11270661y^{31} +$$

$$+ 6919434y^{32} + 3595698y^{33} + 1605856y^{34} + 616740y^{35} + 201922y^{36} +$$

$$+ 55418y^{37} + 12421y^{38} + 2185y^{39} + 283y^{40} + 24y^{41} + y^{42} ,$$

$$z^{17} R\left(\frac{a_o}{z},z\right) = 0{,}002195895805767013 + 0{,}0374048751506496 5z +$$

$$+ 0{,}3045427513398593z^2 + 1{,}609999890142489z^3 + 6{,}082437499755959z^4 +$$

$$+ 15{,}63793285795306z^5 + 17{,}91599304702737z^6 - 51{,}54553566144602z^7 -$$

$$- 335{,}590608507844z^8 - 944{,}6733599375556z^9 - 1602{,}387746549973z^{10} -$$

$$- 1203{,}809352959279z^{11} + 2248{,}525208847668z^{12} + 10843{,}27136502205z^{13} +$$

$$+ 24976{,}89318564001z^{14} + 41446{,}35368898398z^{15} + 53580{,}21446281697z^{16} +$$

$$+ 54990{,}44532268608z^{17} + 44657{,}63476209196z^{18} + 28146{,}72780005595z^{19} +$$

$$+ 13180{,}25181166427z^{20} + 4116{,}488475111794z^{21} + 540{,}0926571411417z^{22}$$

$$- 173{,}8358855671167z^{23} - 99{,}13699693809871z^{24} - 15{,}94048258529412z^{25} ,$$

où l'on a utilisé les formules :

$$(y+y^2)^{17}\, R(y, \frac{1}{y+y^2}) = \sum_{\ell=o}^{68} P_\ell\, y^\ell \text{ , où } P_\ell = \sum_{i=\mathrm{Sup}(1,\ell-34)}^{\mathrm{Inf}(\ell,34)} S_i \ \frac{\ell-i}{2}\text{ ,}$$

et pour $(\ell-i)$ pair

avec

$$S_{ij} = \sum_{k=\mathrm{Sup}(j,j+i-17)}^{\mathrm{Inf}(17,i+j-1)} C_{k-1}^{j-1}\ R_{i-k+j\ 17-k} \quad \text{pour} \quad i+j \leqslant 34,\ S_{ij} = 0 \text{ pour } i+j \geqslant 35\ ;$$

$$z^{17}\, R(\frac{a_o}{z}, z) = \sum_{\ell=o}^{34} T_\ell\, z^\ell \quad \text{avec} \quad T_\ell = \sum_{j=\mathrm{Sup}(1,17-\ell)}^{\mathrm{Inf}(17,34-\ell)} R_{\ell+j-17,j}\ a_o^j$$

On peut vérifier que le polynôme $(y+y^2)^7\, R(y, \frac{1}{y+y^2})$ est positif pour $0 \leqslant y \leqslant 1$ et que $z^{17}\, R(\frac{a_o}{z}, z)$ est positif pour $0 \leqslant z < z_1$ où

$2{,}325 \leqslant z_1 \leqslant 3{,}4882....$.

On en déduit qu'il convient d'effectuer le changement de variables

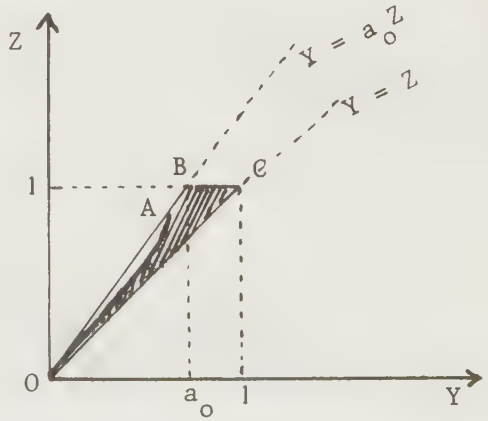
$$Z = \frac{1}{z}\ ,\ Y = y\ .$$

Posons $\tilde{R}(Y, Z) \equiv Z^{17}\ R(Y, \frac{1}{Z}) \equiv \sum_{i=o}^{17} \sum_{j=o}^{18} R_{i\,17-j}\ Y^i\, Z^j$.

Le domaine $\tilde{D}$ transformé de D' par ce changement de variables est défini par

$$a_o\, Z \leqslant Y \leqslant Z \leqslant 1\ ,$$
$$0 \leqslant Z \leqslant Y + Y^2\ ,$$

avec $a_o = 0{,}697628506....$.



La parabole $Z = Y + Y^2$ coupe la droite $Y = a_o Z$ au point $A = (Y_A, Z_A)$,

où $Y_A = \frac{1-a_o}{a_o} = 0{,}433427664....$

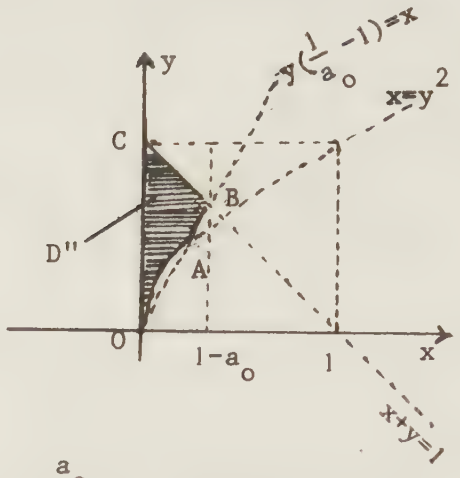
$$Z_A = \frac{a_o^2}{1-a_o} = 0{,}621287205....\ .$$

Le changement de variables $x = Z - Y$, $y = Y$ va permettre d'exprimer

le polynôme $\tilde{R}(Y, Z)$ en fonction des bonnes variables facilitant sa minoration par un polynôme positif dans le domaine D", du plan (x, y), défini par

$$0 \leqslant x \leqslant y^2 \quad , \quad x + y \leqslant 1$$

$$0 \leqslant x \leqslant \left(\frac{1}{a_o} - 1\right)y$$



La parabole $x = y^2$ coupe la droite $x = \left(\frac{1}{a_o} - 1\right)y$ au point A de coordonnées $x_A = 0{,}187859541....$

$y_A = 0{,}433427664....$.

La droite $x + y = 1$ coupe la droite $y = \frac{a_o}{1-a_o}\, x$ au point B de coordonnées $x_B = 1 - a_o = 0{,}302371492$, $y_B = a_o = 0{,}697628506....$

Posons $S(x, y) \equiv \tilde{R}(y, x + y) \equiv \sum_{i=o}^{34} S_i(x) y^i \equiv \sum_{j=o}^{17} T_j(y)\, x^j$,

$$S(x, y) \equiv \sum_{i=o}^{34} \sum_{j=o}^{17} S_{ij}\, y^i\, x^j \ .$$

On peut démontrer que :

$S_{\ell i} = 0$ pour $\ell + i \geqslant 35$,

$$S_{\ell i} = \sum_{K=\,\mathrm{Sup}(i,\ell+i-17)}^{\mathrm{Inf}(17,\ell+i-1)} C_{K-1}^{i-1}\ R_{\ell-K+i\ 17-K} \quad \text{pour} \quad \ell + i \leqslant 34$$

On trouve :

$$S_o(x) = -27x^9 - 108x^{10} - 189x^{11} - 189x^{12} - 117x^{13} - 45x^{14} - 10x^{15} - x^{16} - 0$$

$$S_1(x) = -366x^8 - 1863x^9 - 4088x^{10} - 5143x^{11} - 4108x^{12} - 2150x^{13} - 730x^{14} -$$
$$- 153x^{15} - 18x^{16} - x^{17} \ ,$$

$$S_2(x) = -2064x^7 - 13431x^8 - 37010x^9 - 57849x^{10} - 57458x^{11} - 38041x^{12} - 16977x^{13}$$
$$- 5077x^{14} - 962x^{15} - 113x^{16} - 7x^{17} \ ,$$

$$S_3(x) = -\ 6384x^6 - 53688x^7 - 186788x^8 - 362420x^9 - 442508x^{10} - 360226x^{11}$$
$$- 200132x^{12} - 75968x^{13} - 19452x^{14} - 3304x^{15} - 362x^{16} - 21x^{17},$$

$$S_4(x) = -\ 11736x^5 - 131064x^6 - 584528x^7 - 1418818x^8 - 2130842x^9 - 2113587x^{10}$$
$$- 1429097x^{11} - 665102x^{12} - 212167x^{13} - 46027x^{14} - 6784x^{15} - 659x^{16} - 32x^{17}$$

$$S_5(x) = -\ 12624x^4 - 199416x^5 - 1179032x^6 - 3649632x^7 - 6811292x^8 - 8250722x^9$$
$$- 6742386x^{10} - 3775162x^{11} - 1447326x^{12} - 376603x^{13} - 66250x^{14} - 7889x^{15} -$$
$$- 576x^{16} - 14x^{17},$$

$$S_6(x) = -\ 6720x^3 - 179592x^4 - 1518552x^5 - 6238016x^6 - 14799820x^7 - 22162218x^8$$
$$- 21964532x^9 - 14709006x^{10} - 6654238x^{11} - 1996227x^{12} - 382718x^{13} -$$
$$- 43235x^{14} - 1706x^{15} + 307x^{16} + 42x^{17},$$

$$S_7(x) = -\ 192x^2 - 75360x^3 - 1152144x^4 - 6878112x^5 - 21724400x^6 - 41266436x^7 -$$
$$- 50273856x^8 - 40402772x^9 - 21384728x^{10} - 7163474x^{11} - 1325580x^{12} -$$
$$- 43604x^{13} - 42168x^{14} - 12154x^{15} + 1674x^{16} + 95x^{17},$$

$$S_8(x) = 1296x + 8160x^2 - 362352x^3 - 4365648x^4 - 20514702x^5 - 52137344x^6$$
$$- 80308242x^7 - 78431894x^8 - 48410202x^9 - 17393215x^{10} - 2212234x^{11} -$$
$$+ 959499x^{12} + 576711x^{13} + 153132x^{14} + 24856x^{15} + 2302x^{16} + 83x^{17},$$

$$S_9(x) = 288 + 18000x + 115424x^2 - 875280x^3 - 10527364x^4 - 41378590x^5 -$$
$$- 85759704x^6 - 104557738x^7 - 75005024x^8 - 26296730x^9 + 2661266x^{10} +$$
$$+ 7461839x^{11} + 3798756x^{12} + 1095402x^{13} + 203252x^{14} + 23234x^{15} + 1228x^{16},$$

$$S_{10}(x) = 3600 + 117568x + 713744x^2 - 437184x^3 - 15168934x^4 - 52891388x^5 -$$
$$- 86258746x^6 - 70278648x^7 - 13791056x^8 + 27909860x^9 + 30868689x^{10} +$$
$$+ 16198484x^{11} + 5189426x^{12} + 1060403x^{13} + 126288x^{14} + 4118x^{15} - 902x^{16} - 83x^{17},$$

$$S_{11}(x) = 21376 + 484800x + 2778640x^2 + 4646280x^3 - 5367696x^4 - 24530840x^5$$
$$- 14726896x^6 + 40518012x^7 + 89991820x^8 + 86586320x^9 + 49100724x^{10} +$$
$$+ 17474264x^{11} + 3775590x^{12} + 364089x^{13} - 42428x^{14} - 18608x^{15} -$$
$$- 2286x^{16} - 95x^{17},$$

$$S_{12}(x) = 80800 + 1429064x + 7779560x^2 + 19960824x^3 + 33952560x^4 +$$
$$+ 62790598x^5 + 124753586x^6 + 183825564x^7 + 177470796x^8 +$$
$$+ 110680648x^9 + 43481876x^{10} + 9406761x^{11} + 173901x^{12} - 556987x^{13}$$
$$- 177931x^{14} - 26780x^{15} - 1907x^{16} - 42x^{17},$$

$$S_{13}(x) = 219856 + 3233160x + 16791176x^2 + 48551384x^3 + 103551596x^4 +$$
$$+ 186113410x^5 + 266435708x^6 + 274547374x^7 + 190266164x^8 + 81809928x^9 +$$
$$+ 16146704x^{10} - 3205685x^{11} - 3248294x^{12} - 1049911x^{13} - 184018x^{14} -$$
$$- 16781x^{15} - 504x^{16} + 14x^{17},$$

$$S_{14}(x) = 461880 + 5880120x + 29074472x^2 + 85080660x^3 + 178626570x^4 +$$
$$+ 282765592x^5 + 324821534x^6 + 252943800x^7 + 117956342x^8 +$$
$$+ 17175336x^9 - 15850571x^{10} - 12275986x^{11} - 4289173x^{12} - 847170x^{13} -$$
$$- 85379x^{14} - 1106x^{15} + 547x^{16} + 32x^{17},$$

$$S_{15}(x) = 784016 + 8855424x + 41238384x^2 + 114950852x^3 + 219714016x^4 +$$
$$+ 293889604x^5 + 261512240x^6 + 131254612x^7 + 4976548x^8 -$$
$$- 43691292x^9 - 33333824x^{10} - 12888094x^{11} - 2807048x^{12} - 274310x^{13} +$$
$$+ 16576x^{14} + 7502x^{15} + 718x^{16} + 21x^{17} ,$$

$$S_{16}(x) = 1106928 + 11210361x + 48203404x^2 + 122107039x^3 + 200715863x^4 +$$
$$+ 209693181x^5 + 112979075x^6 - 18563422x^7 - 83431087x^8 - 68059024x^9 -$$
$$- 29506741x^{10} - 6992083x^{11} - 549308x^{12} + 166124x^{13} + 56719x^{14} + 7310x^{15}$$
$$+ 409x^{16} + 7x^{17} ,$$

$$S_{17}(x) = 1318866 + 11941605x + 46043512x^2 + 100450641x^3 + 128690568x^4$$
$$+ 75097020x^5 - 39283978x^6 - 117404745x^7 - 106859498x^8 - 52557637x^9$$
$$- 13464666x^{10} - 521558x^{11} + 805308x^{12} + 279370x^{13} + 45282x^{15} +$$
$$+ 3709x^{15} + 126x^{16} + x^{17} ,$$

$$S_{18}(x) = 1326845 + 10559326x + 34814219x^2 + 58721590x^3 + 38290121x^4 -$$
$$- 43383137x^5 - 124361057x^6 - 130271866x^7 - 73652667x^8 -$$
$$- 20410351x^9 + 559262x^{10} + 2567698x^{11} + 974883x^{12} + 192318x^{13} +$$
$$+ 20835x^{14} + 1064x^{15} + 17x^{16} ,$$

$$S_{19}(x) = 1111508 + 7469380x + 18838060x^2 + 14733290x^3 - 31420956x^4$$
$$- 99351000x^5 - 123348404x^6 - 81497636x^7 - 24616070x^8 +$$
$$+ 3115717x^9 + 5911136x^{10} + 2529254x^{11} + 596778x^{12} + 81305x^{13} +$$
$$+ 5600x^{14} + 136x^{15} + 0 ,$$

$$S_{20}(x) = 746938 + 3797052x + 4111657x^2 - 15427195x^3 - 59108840x^4 -$$

$$- 89957707x^5 - 70968557x^6 - 23724882x^7 + 6329125x^8 +$$

$$+ 10253012x^9 + 5024019x^{10} + 1405222x^{11} + 234143x^{12} + 20580x^{13} +$$

$$+ 680x^{14} ,$$

$$S_{21}(x) = 361624 + 753808x - 4979210x^2 - 25432616x^3 - 49608386x^4 -$$

$$- 48114913x^5 - 18236318x^6 + 8353279x^7 + 13690908x^8 + 7777198x^9 +$$

$$+ 2570282x^{10} + 515697x^{11} + 5605x^{12} + 2380x^{13} ,$$

$$S_{22}(x) = 68528 - 957260x - 7486136x^2 - 20016946x^3 - 24889531x^4 - 11074132x^5$$

$$+ 7917265x^6 + 14206962x^7 + 9471605x^8 + 3703414x^9 + 887887x^{10} +$$

$$+ 117208x^{11} + 6188x^{12} ,$$

$$S_{23}(x) = - 83240 - 1349760x - 5577104x^2 - 9493006x^3 - 5211108x^4 + 5536912x^5 +$$

$$+ 11461408x^6 + 9100234x^7 + 4233086x^8 + 1210495x^9 + 192192x^{10} + 12376x^{11} ,$$

$$S_{24}(x) = - 112480 - 959125x - 2516563x^2 - 1836575x^3 + 2851546x^4 +$$

$$+ 7130620x^5 + 6872957x^6 + 3842410x^7 + 1314885x^8 + 250250x^9 + 19448x^{10} ,$$

$$S_{25}(x) = - 76730 - 414115x - 456742x^2 + 1055860x^3 + 3359636x^4 + 4036942x^5$$

$$+ 2756390x^6 + 1138423x^7 + 260260x^8 + 24310x^9 ,$$

$$S_{26}(x) = - 31855 - 71496x + 266692x^2 + 1160334x^3 + 1807729x^4 + 1544634x^5 +$$

$$+ 781417x^6 + 216216x^7 + 24310x^8 ,$$

$$S_{27}(x) = - 5296 + 41216x + 277312x^2 + 596610x^3 + 662382x^4 + 420147x^5 +$$

$$+ 142688x^6 + 19448x^7 ,$$

$$S_{28}(x) = 2944 + 41006x + 136865x^2 + 210018x^3 + 173285x^4 + 73892x^5 + 12376x^6 ,$$

$$S_{29}(x) = 2828 + 19500x + 46414x^2 + 52955x^3 + 29400x^4 + 6188x^5 ,$$

$$S_{30}(x) = 1300 + 6386x + 11301x^2 + 8680x^3 + 2380x^4 ,$$

$$S_{31}(x) = 412 + 1504x + 1792x^2 + 680x^3 ,$$

$$S_{32}(x) = 94 + 231x + 136x^2 ,$$

$$S_{33}(x) = 14 + 17x ,$$

$$S_{34}(x) = 1.$$

En utilisant la double inégalité $0 < x < y^2$ on peut montrer que

$$\sum_{i=o}^{16} y^i S_i(x) \geqslant \sum_{i=6}^{16} y^i \hat{S}_i(x) , \quad \text{où}$$

$$\hat{S}_6(x) = 42x^{17} ,$$

$$\hat{S}_7(x) = 33916x^{14} + 11557x^{15} + 1660x^{16} + 95x^{17} ,$$

$$\hat{S}_8(x) = 1296x + 1440x^2 + 529791x^{12} + 526579x^{13} + 150760x^{14} + 24856x^{15} +$$

$$+ 2302x^{16} + 83x^{17} ,$$

$$\hat{S}_9(x) = 288 + 17808x + 27440x^2 + 5740051x^{11} + 3685580x^{12} + 1095402x^{13} +$$

$$+ 203252x^{14} + 23234x^{15} + 1228x^{16} ,$$

$$\hat{S}_{10}(x) = 3600 + 117568x + 153680x^2 + 3180283x^3 + 26443014x^{10} + 16198484x^{11}$$

$$+ 5189426x^{12} + 1060403x^{13} + 126288x^{14} + 4118x^{15} - 902x^{16} - 83x^{17} ,$$

$$\hat{S}_{11}(x) = 21376 + 484800x + 551800x^2 + 38332918x^8 +$$

$$+ 80560088x^9 + 49100724x^{10} + 17474264x^{11} + 3775590x^{12} +$$

$$+ 364089x^{13} - 42428x^{14} - 18608x^{15} - 2286x^{16} - 95x^{17} ,$$

$$\hat{S}_{12} = 80800 + 1429064x + 1325048x^2 + 105448045x^7 + 177470796x^8 +$$

$$+ 110680648x^9 + 43481876x^{10} + 9406761x^{11} + 173901x^{12} - 556987x^{13} -$$

$$- 177931x^{14} - 26780x^{15} - 1907x^{16} - 42x^{17} ,$$

$$\hat{S}_{13} = 219856 + 3233160x + 2798894x^2 + 7856547x^5 + 184439204x^6 +$$

$$+ 274547374x^7 + 190266164x^8 + 81809928x^9 + 16146704x^{10} - 3205685x^{11}$$

$$- 3248294x^{12} - 1049911x^{13} - 184018x^{14} - 16781x^{15} - 504x^{16} + 14x^{17} ,$$

$$\hat{S}_{14} = S_{14} - 22558814x^2 ,$$

$$\hat{S}_{15} = S_{15} - 23757585x^2 - 55183184x^3 ,$$

$$\hat{S}_{16} = S_{16} - 19488734x^2 .$$

Maintenant on va utiliser la double inégalité

$$0 \leqslant y \leqslant 1$$

pour minorer l'expression :

$$\sum_{i=6}^{16} \hat{S}_i(x)\, y^i + \sum_{i=17}^{34} y^i\, S_i(x)$$

par une autre, ne contenant pas des coefficients négatifs, qui s'écrit sous la forme :

$$\sum_{i=7}^{27} y^i\, \tilde{S}_i(x) + \sum_{i=28}^{34} y^i\, S_i(x) , \qquad \text{où}$$

$$\tilde{S}_7(x) = 24460x^{14} + 356x^{15} ,$$

$$\tilde{S}_8(x) = 1296x + 1440x^2 + 529791x^{12} + 318095x^{13} ,$$

$$\tilde{S}_9(x) = 288 + 17808x + 27440x^2 + 5740051x^{11} + 1930674x^{12} ,$$

$$\tilde{S}_{10}(x) = 3600 + 117568x + 153680x^2 + 3180283x^3 + 26443014x^{10} + 7196103x^{11} ,$$

$$\tilde{S}_{11}(x) = 21376 + 484800x + 551800x^2 + 38332918x^8 + 80560088x^9 + 16573502x^{10} ,$$

$$\tilde{S}_{12} = 80800 + 1429064x + 1325048x^2 + 105448045x^7 + 177470796x^8 + 24947608x^9 ,$$

$$\tilde{S}_{13}(x) = 219856 + 3233160x + 2798894x^2 + 7856547x^5 + 184439204x^6 +$$
$$+ 274547374x^7 + 24639732x^8 + 14x^{17} ,$$

$$\tilde{S}_{14}(x) = 461880 + 5880120x + 6515658x^2 + 85080660x^3 + 50499082x^4 +$$
$$+ 234672870x^5 + 323114535x^6 + 12735861x^7 + 547x^{16} + 32x^{17} ,$$

$$\tilde{S}_{15}(x) = 784016 + 8855424x + 17480799x^2 + 59767668x^3 + 219714016x^4$$
$$+ 286798916x^5 + 16576x^{14} + 7502x^{15} + 718x^{16} + 21x^{17} ,$$

$$\tilde{S}_{16}(x) = 1106928 + 11210361x + 28714670x^2 + 122107039x^3 +$$
$$+ 197457731x^4 + 166124x^{13} + 56719x^{14} + 7310x^{15} + 409x^{16} + 7x^{17} ,$$

$$\tilde{S}_{17}(x) = 1318866 + 11941605x + 46043512x^2 + 100450641x^3 + 805308x^{12} +$$
$$+ 279370x^{13} + 45282x^{14} + 3709x^{15} + 126x^{16} + x^{17} ,$$

$$\tilde{S}_{18}(x) = 1326845 + 10559326x + 34814219x^2 + 1248542x^3 + 559262x^{10} +$$
$$+ 2567698x^{11} + 974883x^{12} + 192318x^{13} + 20835x^{14} + 1064x^{15} + 17x^{16} ,$$

$$\tilde{S}_{19}(x) = 1111508 + 4471432x + 1933962x^2 + 3115717x^9 + 5911136^{10} +$$
$$+ 2529254x^{11} + 596778x^{12} + 81305x^{13} + 5600x^{14} + 136x^{15} ,$$

$$\tilde{S}_{20}(x) = 746938 + 6329125x^8 + 10253012x^9 + 5024019x^{10} + 1405222x^{11} +$$
$$+ 234143x^{12} + 20580x^{13} + 680x^{14} .$$

$$\tilde{S}_{21}(x) = 120551 + 8353279x^7 + 13690908x^8 + 7777198x^9 + 2570282x^{10} +$$
$$+ 515697x^{11} + 56056x^{12} + 2380x^{13} ,$$

$$\hat{S}_{22}(x) = 68528 + 7917265x^6 + 14206962x^7 + 9471605x^8 + 3703414x^9 + 887887x^{10} + 117208x^{11} + 6188x^{12} ,$$

$$\hat{S}_{23}(x) = 5536912x^5 + 11461408x^6 + 9100234x^7 + 4233086x^8 + 1210495x^9 + 192192x^{10} + 12376x^{11} ,$$

$$\hat{S}_{24}(x) = 2851546x^4 + 7130620x^5 + 6872957x^6 + 3842410x^7 + 1314885x^8 + 250250x^9 + 19448x^{10}$$

$$\hat{S}_{25}(x) = 1055860x^3 + 3359636x^4 + 4036942x^5 + 2756390x^6 + 1138423x^7 + 260260x^8 + + 24310x^9 ,$$

$$\hat{S}_{26}(x) = 266692x^2 + 1160334x^3 + 1807729x^4 + 1544634x^5 + 781417x^6 + 216216x^7 + 24310x^8 ,$$

$$\hat{S}_{27}(x) = 41216x + 277312x^2 + 596610x^3 + 662382x^4 + 420147x^5 + 142688x^6 + 19448x^7 .$$

C. Q. F. D.

REFERENCES

[1] Badaoui EL MABSOUT.
C.R.A.S., 276, série A, 1973, p. 495.

[2] Badaoui EL MABSOUT.
C.R.A.S., 278, série A, 1974, p. 459.

[3] Robert EASTON.
Journal of Differential Equations, 10, 1971, p. 371-377.

[4] Stephen SMALE.
Inventiones Mathematicae, 10, n°4, 1970, p. 305-331.

[5] Stephen SMALE.
Inventiones Mathematicae, 11, n°1, 1970, p. 45-64.

[6] W.S. MASSEY.
Algebraic Topology ; An Introduction, Harcourt, Brace and World, Inc., 1967.

[7] J. MILNOR.
Morse Theory, Princeton University Press, 1963.

[8] Y. THIRY.
Les Fondements de la Mécanique Céleste, Gordon et Breach 1970.

[9] V. ARNOLD.
Russian Math. Surveys. 18. n°6, 1963, p. 85-193.

[10] J. MILNOR.
Journal of Differential Geometry, 2, 1968, p. 1-7.

[11] Badaoui EL MABSOUT.
C.R.A.S., 2.

[12] Clark ROBINSON.
Fixing the center of Mass in the n-body problem by means of a group action. Géométrie symplectique et Physique mathématique. Coloque du C.N.R.S. Juin 1974.

[13] J. MILNOR.
Sommes de variétés différentiables et Structure différentiable des sphères, Bull. Soc. Math. de France, 87, 1959, 439-444.

NOTATIONS

Page

- M_1, M_2, M_3 sont les trois corps 1
- O est l'origine du plan et le centre de gravité des trois corps..... 1
- m_1, m_2, m_3 désignent les masses des trois corps..... 1
- $x = (x^1, \ldots, x^6) \in \mathbb{R}^6$ est tel que $\overrightarrow{O M_i} = (x^{2i-1}, x^{2i})$, $i = 1, 2, 3$.... 1
- $\overrightarrow{q_i} = \overrightarrow{O M_i}$ $i = 1, 2, 3$ 1
- $y = (y_1, \ldots y_6) \in \mathbb{R}^6$ est tel que y_i = variable conjuguée de x^i, $i = 1, .., 6$. 1
- $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{3} m_i [(x^{2i-1})^2 + (x^{2i})^2]$ 1
- $\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{m_i} [(y_{2i-1})^2 + (y_{2i})^2]$ 1
- $r_{ij}(x)$ = distance dans le plan de M_i à M_j 1
- $K = \{x \in \mathbb{R}^6 : r_{ij}(x) = 0$ pour au moins un couple (i,j) tel que $i \neq j\}$.. 1
- H est l'hamiltonien $H : (\mathbb{R}^6 - K) \times \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}$

  $(x, y) \longmapsto H(x, y) = \frac{1}{2} \|y\|^2 - u(x)$..... 1
- $U(x) = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}(x)}$ 1
- J est le moment cinétique total par rapport à O..... 2

- $M^7(\omega)$ est la variété de moment cinétique constant ω et telle que $x \neq 0$.. 2

- $A(x) = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -x^2 & x^1 & -x^4 & x^3 & -x^6 & x^5 \end{pmatrix}$ 2

- ω est la constante du moment cinétique 2

- $\Omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$ 2

- S^n est la sphère de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ 2

- $\rho : M^7(\omega) \longrightarrow S^5$ 2

  $(x, y) \longmapsto \frac{x}{\|x\|}$

- $u = \frac{x}{\|x\|} = (u^1, \ldots, u^6)$, $x \in (\mathbb{R}^6 - K)$ 2

.../...

Page

- $\hat{S}^3 = \rho[M^7(\omega)]$ 2
- h est la constante de l'énergie 2
- $M^6(h,\omega) = \{(x, y) \in M^7(\omega) \mid x \in (\mathbb{R}^6 - K),\ H(x,y) = h\}$ 3
- $\pi = \rho|_{M^6(h,\omega)}$ 3
- $M^3(h,\omega) = \pi[M^6(h,\omega)]$ 3
- $s^1 = \frac{r_{23}(x)}{\|x\|}$, $s^2 = \frac{r_{31}(x)}{\|x\|}$, $s^3 = \frac{r_{12}(x)}{\|x\|}$, $x \in (\mathbb{R}^6 - K)$ 3
- $\hat{S}^2 = \{s = (s^1, s^2, s^3) \in \mathbb{R}^3 : m_2\, m_3 (s^1)^2 + m_3\, m_1 (s^2)^2 + m_1\, m_2 (s^3)^2 = m_1 + m_2 + m_3\}$ 3
- $P : M^3(h, \omega) \longrightarrow \hat{S}^2$
  $u \longmapsto s = P(\omega) = (s^1, s^2, s^3)$ 3
- $M^2(h, \omega) = P[M^3(h, \omega)]$ 3
- $V(s) = \frac{m_2\, m_3}{s^1} + \frac{m_3\, m_1}{s^2} + \frac{m_1\, m_2}{s^3} \equiv \|x\|\, U(x) = U(u)$ 3
- $\simeq$ désigne le difféomorphisme entre les espaces 3
- $\nabla = \{s \in \hat{S}^2 : 0 \leqslant s^1 \leqslant s^2 + s^3 ,\quad 0 \leqslant s^2 \leqslant s^3 + s^1,\ 0 \leqslant s^3 \leqslant s^1 + s^2\}$ 6
- $\nu = m_1 + m_2 + m_3$ 6
- a, b, c, d 7
- ρ_1, ρ_2, ρ_3 7
- $f_i(\rho_i)$, i = 1, 2, 3 7
- $\nabla' = \nabla$ - les trois sommets 11
- $\varepsilon_2 = m_2 / m_1$, $\varepsilon_3 = m_3 / m_1$ 15
- U_1, U_2, U_3 15
- $\Sigma^2 = S^2$ privé de trois points distincts 15
- φ_o 19
- $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \sigma^5, \sigma^6)$ 20
- $v = (v^1, v^2, v^3)$ 21
- $A'_3(u) = (-m_1 u^2, m_1, u^1, -m_2 u^4, m_2 u^3, -m_3 u^6, m_3 u^5)$, $u \in M^3(h,\omega)$ 26
- $y_u = \frac{U(u)}{\varepsilon} A'_3(u)$ 26
- u_o est un point de $M^3(h,\omega)$ tel que $U^2(u_o) + 2h\omega^2 = 0$ 28
- X, Y, Z 28-29
- D^i = disque de dimension i 28
- (D^2 - n points) = disque du plan privé de n points intérieurs 32

.../...

Page

- $(S^5 - S^3)$ = est S^5 privé d'une copie de S^3 33
- $(S^5 - 2S^3) = S^5$ privé de deux copies disjointes de S^3 34
- $(S^5 - 3S^3) = S^5$ privé de trois copies disjointes de S^3 36
- $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 49
- $D = A_3(\sigma)$ y 49
- y_a , σ_a 50
- v_a 50
- y_b , v_b 62
- v_c , y_c 67,68
- v_d , y_d 72
- $\pi_1(E)$ = premier groupe d'homotopie d'un espace E connexe par arcs. 80
- Z = groupe libre à un générateur 80
- $G_1 \star G_2$ = produit libre du groupe libre G_1 par le groupe libre G_2. 80
- Z_n = groupe libre à n générateurs 80
- $Z \times Z_n$ est le produit direct de Z par Z_n 80
- $\approx$ désigne l'isomorphisme entre les groupes 80
- $Z^2 = Z \times Z$ = groupe libre abélien à deux générateurs 81
- x_o = 1,431831618 .....A.I
- a_o = 0,697628506 .....A.V
- $D(x, y)$, $N_2(x, y)$, $N_3(x, y)$ .....A'.III
- $P(x, y)$ ..... A'.VI
- $D'(y, z)$, $N_2'(y, z)$, $N_3'(y, z)$ ..... A'.IX
- $Q(y, z) \equiv P(x, y)$ ..... A'.X
- $P_i(x)$, i = 0, 1,....18 ..... A'.XI,..,A'.XIV
- $R(x, y)$, $R_j(x)$, j = 0, 1,..., 17 ..... A'.XIV,.., A'.XVII
- $\tilde{R}(X, Y)$, $\tilde{R}_\ell(X)$, ℓ = 0, 1,..., 17 ..... A'.XIX,.., A'.XXII
- $\tilde{R}(Y, Z) = Z^{17} R(Y, \frac{1}{Z})$ ..... A'.XXVII
- $S(x, y)$, $S_i(x)$, i = 0, 1, ..., 34 .....A'.XXVIII,A'.XXXIII

=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=